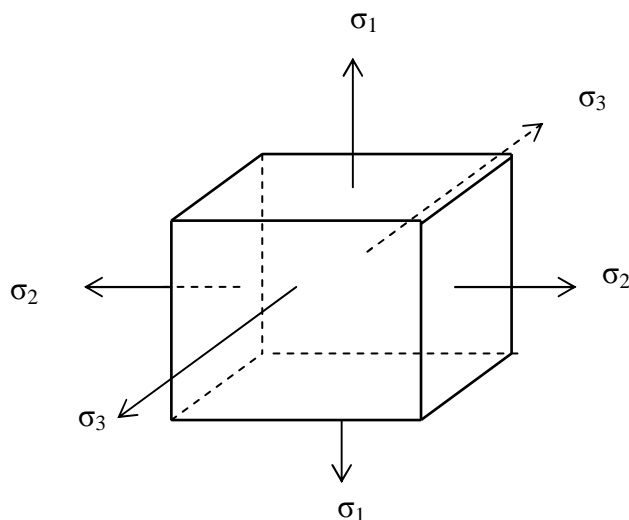


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА

Э.В. Лукина, А.И. Кузнецов

**КУРС ЛЕКЦИЙ С ТЕСТОВЫМИ ЗАДАНИЯМИ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА». ЧАСТЬ 1.
«ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ»**



ХАРЬКОВ – ХНАГХ – 2008

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА

Э.В. Лукина, А.И. Кузнецов

**КУРС ЛЕКЦИЙ С ТЕСТОВЫМИ ЗАДАНИЯМИ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА»
ЧАСТЬ 1
«ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ»**

(для студентов электротехнических и строительных специальностей,
направление подготовки 0922 – «Электромеханика» факультета
последипломного образования и заочного обучения)

ХАРЬКОВ – ХНАГХ – 2008

Курс лекций по дисциплине «Прикладная механика». Часть 1. «Основы расчетов на прочность» (для студентов электротехнических и строительных специальностей, направление подготовки 0922 – «Электромеханика» факультета последипломного образования и заочного обучения). – Авт.: Лукина Э.В., Кузнецов А.И. - Харьков, ХНАГХ, 2008. – 101 с.

Авторы: Э.В.Лукина,
А.И.Кузнецов

Рецензент: Т.А. Оболенская, профессор
кафедры «Сопротивление материалов и
теоретическая механика» УИПА.

Рекомендовано Ученым советом ХНАГХ
протокол №8 от 28 марта 2008 г.

ВВЕДЕНИЕ

Курс лекций должен помочь студентам, обучающимся без отрыва от производства, освоить теорию и овладеть методами решения задач по курсу «Прикладная механика», являющемуся комплексной общетехнической дисциплиной, и включающему важнейшие разделы дисциплин «Сопротивление материалов», «Теория механизмов и машин» и «Детали машин».

Основные задачи курса: изучение основ прочности и освоение расчетов на прочность простых силовых элементов несущих конструкций, освоение общих принципов построения машин, механизмов, деталей машин и их проектирование.

Проектирование любой машины или сооружения состоит из двух основных тесно переплетающихся и друг друга дополняющих этапов: конструирования и расчета.

Конструирование представляет собой создание проекта машины или сооружения.

Целью расчета проектируемых конструкций является проверка их на прочность, жесткость и устойчивость.

Сопротивление материалов - это наука о прочности частей сооружений и машин. Она основывается на результатах опыта и использует математический аппарат при анализе. С момента своего возникновения эта наука всегда была тесно связана с практикой, выдвигающей все новые задачи, решение которых способствует развитию науки о сопротивлении материалов.

Задача науки о сопротивлении материалов - создание основ для расчета частей конструкций и машин с учетом их надежности и экономичности.

Целью науки о сопротивлении материалов является определение размеров сооружений и машин еще до их постройки. Опираясь на данные этой науки, инженер может сознательно проектировать машины и сооружения. Расчет обеспечивает возможность инженерам уверенно и целесообразно создавать смелые и в то же время надежные, прочные и легкие, а также

удовлетворяющие эстетическим требованиям конструкции.

Поскольку данная наука имеет дело с прочностью и жесткостью реальных элементов систем, сделанных из реальных материалов, ее выводы должны быть основаны на изучении и познании действительных свойств этих материалов, т.е. на соответствующим образом поставленных экспериментах. Следовательно, сопротивление материалов является не только теоретической, но и экспериментальной наукой. Решение любой задачи сопротивления материалов начинается с принятия допущений, основанных на экспериментальных исследованиях, и заканчивается проверкой полученных результатов в лаборатории.

Теоретические положения сопротивления материалов основываются на законах механики твердого тела: на условиях равновесия, законах сложения сил, теориях о моментах сил, на принципе возможных перемещений и др.

Наука о сопротивлении материалов занимается определением напряжений и деформаций в упругих зонах (этим же занимается и теория упругости). Различие между сопротивлением материалов и теорией упругости заключается в методах решения задачи. Теория упругости ставит своей целью получение более точного решения задач, в связи с чем применяет более сложный математический аппарат. Сопротивление материалов пользуется более простыми методами, основанными на введении некоторых допущений, взятых из опыта, которые упрощают изучаемую картину явлений, но не ведут к противоречию с практикой.

В элементах конструкций под действием нагрузок возникают не только упругие деформации, исчезающие с прекращением действия внешних сил, но и остаточные(пластические) деформации. Изучением последних занимается теория пластичности.

Вопросы прочности изучает также строительная механика, рассматривающая главным образом вопросы прочности сооружений, самолетов, кораблей и машин. В отличие от строительной механики, сопротивление материалов рассматривает сооружение не в целом, а его

отдельные элементы.

Начало развития сопротивления материалов как науки относят к 1638 г. и связывают с именем Галилео Галилея. Значительная часть работ Галилея посвящена решению задач о зависимости между размерами балок и других стержней и теми нагрузками, которые могут выдержать эти элементы конструкций.

Дальнейшее развитие сопротивления материалов происходило параллельно развитию техники строительства и машиностроения и связано с целым рядом работ выдающихся ученых-математиков, физиков и инженеров, среди которых значительное место занимают русские и советские ученые.

В XIX в. мировую известность приобрели работы Д.И.Журавского и Х.Г.Головина (первый решил ряд важных вопросов, связанных с прочностью балок при изгибе, второй впервые правильно решил задачу о прочности кривых стержней). В мировую науку прочно вошли работы Ф.С.Ясинского по вопросам устойчивости элементов конструкций, вызванным необходимостью изучения причин разрушения некоторых мостов.

С начала XX в. роль русских ученых в сопротивлении материалов стала ведущей. Проф. И.Г. Бубнов является основоположником современной науки о прочности корабля. Академик А.Н.Крылов, помимо дальнейшего развития задач о расчете корабля, известен крупнейшими исследованиями в области динамических расчетов. Многих вопросов расчета на прочность касались работы С.П.Тимошенко.

Академик А.Н. Динник опубликовал ряд работ по устойчивости элементов конструкций. Профессор Н.И. Давиденков создал новую оригинальную теорию расчета тонкостенных оболочек и тонких стержней, имеющих широкое применение в различных конструкциях.

1. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Классификация сил, действующих на элементы конструкций

Внешние силы классифицируют по нескольким признакам:

1. В зависимости от места приложения сил:

- а) поверхностные силы, которые действуют по поверхности элемента (давление газа на стенки цилиндра - двигатель внутреннего сгорания);
- б) объемные силы, приложенные к каждой точке объема, элемента (собственный вес, инерционные силы).

2. В зависимости от размера площади воздействия приложения:

- а) сосредоточенные силы, действующие на площадь, размеры которой малы по сравнению с величиной элемента (давление колеса вагона на рельс);
- б) распределенные нагрузки - непрерывно действующие на некоторую площадь или длину элемента (давление воды на плотину, ветра, снега). Они могут быть распределены по длине или площади.

3. В зависимости от продолжительности времени действия внешних сил:

- а) постоянные нагрузки, которые действуют на протяжении всего времени работы конструкции (собственный вес конструкции);
- б) временные нагрузки, действующие лишь определенное время (вес автомобилей, проезжающих по мосту).

4. По характеру действия:

- а) статические - будучи приложены к телу (элементу), возрастают постоянно от нуля до своей конечной величины, причем их действие не вызывает ускорений в элементах, или они настолько малы, что при расчете ими можно пренебречь;
- б) динамические, при действии которых в элементах возникают значительные ускорения (инерционные, ударные, повторно-периодические и взрывные).

К ударным можно отнести действие парового молота на забиваемую сваю, когда время действия нагрузки исчисляется долями секунды.

Динамические силы по иному действуют на элементы конструкций, чем статические, кроме этого материал элементов по-разному сопротивляется воздействию указанных сил.

Непосредственной причиной деформации и разрушения являются не внешние силы (нагрузка), а внутренние усилия и моменты. Так, очевидно, стержень будет разрушаться посередине, хотя здесь и нет внешних сил (рис.1.1).

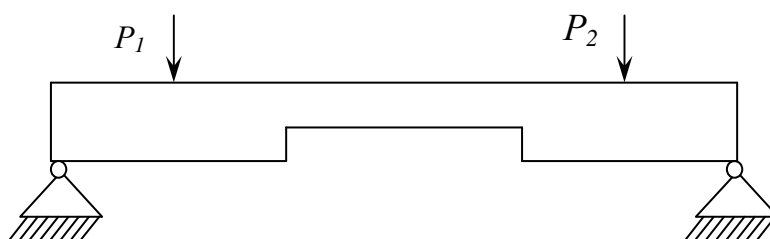


Рис.1.1

1.2. Понятие о деформации, упругости и пластичности

Наука о сопротивлении материалов изучает реальные тела, которые вследствие воздействия внешних сил изменяют свою форму и размеры.

Изменение формы и размеров тела называется деформацией. Деформация, исчезающая полностью после удаления внешних сил, называется упругой.

Деформация, которая после удаления внешних сил не исчезает, называется остаточной. Остаточные деформации в элементах машин и сооружений, как правило, не допускаются. При проектировании элементов конструкций их размеры следует назначать такими, чтобы в них не возникала остаточная деформация.

Способность тел восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после удаления внешних сил называется упругостью.

Появление остаточных деформаций для некоторых материалов связано с таким напряженным состоянием тела, когда значительное их нарастание происходит без заметного увеличения нагрузки. Это явление называется пластичностью материалов.

1.3. Основные гипотезы и допущения

Изучение напряженного состояния реальных тел встречает серьезные трудности, обусловленные разнообразием физических и механических свойств материалов. В связи с этим теорию расчета приходится строить на определенных гипотезах и допущениях:

1) Гипотеза плоских сечений. Плоские сечения, проведенные в теле до деформации, остаются плоскими и после деформации.

2) Гипотеза о сплошности тел. Весь объем тел сплошь заполнен веществом или материей.

3) Допущение о малости деформаций. Деформации тел малы по сравнению с их размерами, т.е. тела по отношению к своим размерам незначительно изменяют форму, что дает возможность применить принцип независимости действия сил и др. теоремы механики твердого тела.

4) Допущение об однородности тел - физические и механические свойства тела во всех точках по всем направлениям одинаковы. Изотропное тело – это тела, физические и механические свойства которых одинаковы по всем направлениям, анизотропное наоборот.

5) Принцип Сен-Венана - в точках, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, внутренние силы почти не зависят от способа их приложения.

6) Принцип независимости действия сил. Результат воздействия на тело

системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, прикладываемых к телу, причем в любом порядке.

1.4. Метод сечений. Напряжения

В элементах конструкций под действием внешних сил возникают внутренние силы, взаимодействующие между отдельными частями элемента конструкции. Возникновение внутренних сил сопровождается деформацией тела. Эти силы противодействуют внешним силам и стремятся восстановить прежнюю форму тела.

В сопротивлении материалов при определении внутренних сил пользуются методом сечений. Пусть тело под действием системы сил P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 и P_6 находится в состоянии равновесия (рис. 1.2).

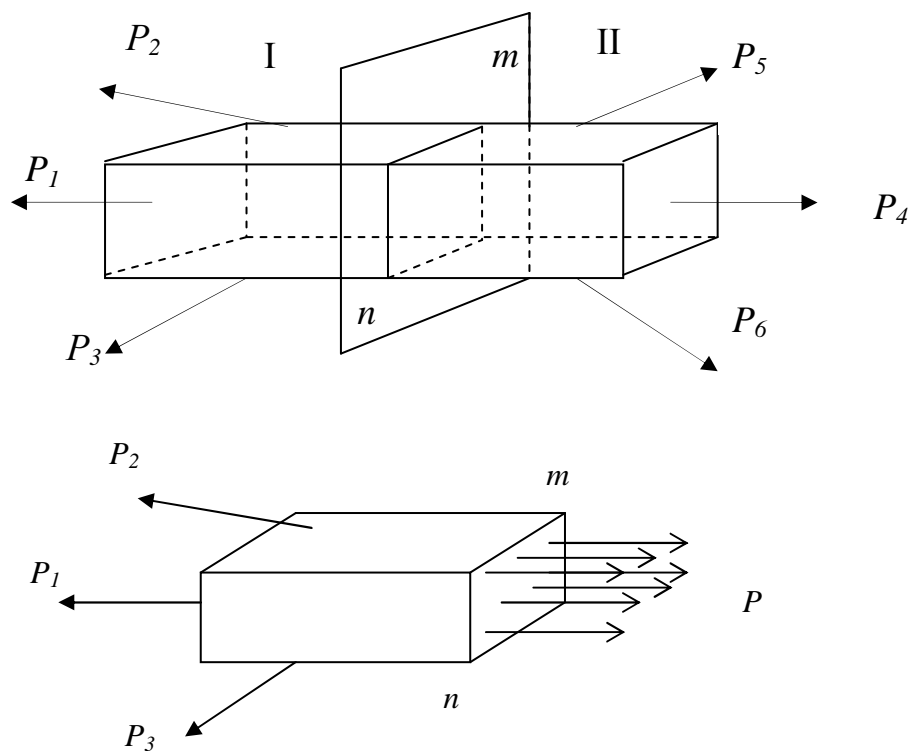


Рис. 1.2

В том месте, где мы хотим определить внутренние силы (силы взаимодействия), мысленно проведем плоскость mn , которая разделит тело на две части I и II . Отбросим одну из частей. Тогда на оставшуюся часть I , кроме внешних сил по сечению mn будут действовать внутренние силы, распределенные по всей площади. Эти внутренние силы взаимодействия, отнесенные к единице площади сечений, называются напряжениями.

Напряжения, действующие от I части на II , по закону равенства действия и противодействия равны между собой.

$$\text{Размерность напряжения } МПа = 10^6 \text{ Па} = \frac{Н}{мм^2} .$$

В дальнейшем напряжение будем обозначать буквой « P », нормальная составляющая - σ и касательное напряжение τ . Величина напряжения в данной точке является мерой интенсивности действия внутренних сил, возникающих в результате деформаций, вызванных внешними силами.

Равнодействующая внутренних сил, действующих по площади сечения mn , называется усилием.

При определении усилия нельзя просто суммировать напряжения, а необходимо определить элементарное усилие, действующее на малую площадку ΔF , после чего можно произвести суммирование по всему сечению.

Напряжением в данной точке называется

$$P = \left| \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} \right| = \frac{dP}{dF} .$$

Условия равновесия системы сил в общем случае запишем:

$$\sum x = 0 ; \sum y = 0 ; \sum z = 0 ; \sum M_x = 0 ; \sum M_y = 0 ; \sum M_z = 0 .$$

Установление связи между внешними и внутренними силами требует знания закона распределения деформаций по сечению. Только установив характер деформаций, можно судить о распределении внутренних сил по

сечению.

1.5. Виды деформаций

Силы, приложенные к стержню, могут вызвать в нем такие деформации:

1) растяжение или сжатие – при направлении действующих сил вдоль оси стержня. Ось стержня при этом остается прямолинейной (рис. 1.3).

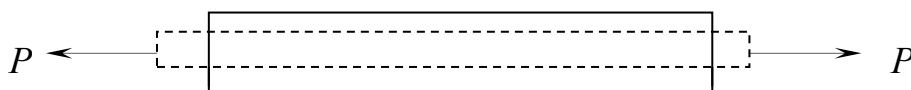


Рис. 1.3.

2) сдвиг возникает в том случае, когда силы стремятся переместить одну часть бруса относительно другой (заклепки, болты, сварные швы, врубки).

3) кручение (рис. 1.4) возникает в том случае, когда на стержень действуют пары сил, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к оси бруса (вала).

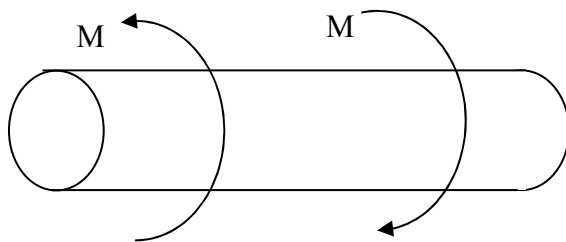


Рис. 1.4

4) изгиб (рис. 1.5) возникает, когда силы, действующие на брус, лежат в плоскостях, проходящих через его ось. Эти силы должны быть направлены перпендикулярно к оси балки.

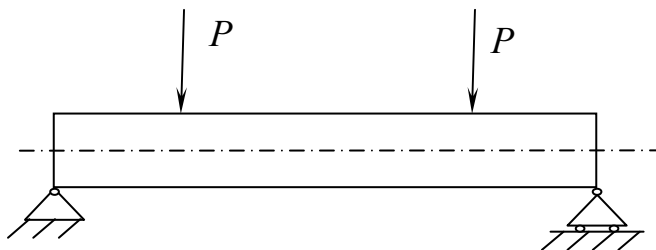


Рис. 1.5

Возможны случаи, когда одновременно возникают несколько видов деформаций - это сложное сопротивление.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение понятий упругости, пластичности и ползучести?
2. Какое содержание понятия внутренних усилий, в чем его отличие от понятия внешних сил?
3. Что общего и в чем различие между внутренними усилиями и напряжениями?
4. Какова зависимость между внутренними усилиями и напряжениями?
5. Какие существуют виды деформаций, их содержание?
6. По каким признакам и как классифицируют нагрузки?
7. В чем сущность метода сечений?
8. В чем состоит принцип независимого действия сил?

Лабораторные исследования показали, что при центральном растяжении (сжатии) сечение в средней части стержня после деформации остается плоским и поступательно перемещается вдоль оси стержня. Можно заключить, что все продольные волокна испытывают одинаковое удлинение (укорочение). Следовательно, напряжения по всему сечению также будут постоянны.

Для определения внутренних сил применим метод сечений (рис. 2.2).

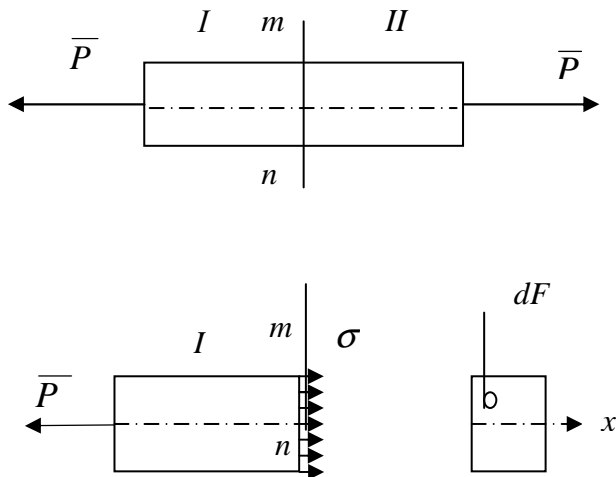


Рис. 2.2.

По сечению mn действуют только нормальные напряжения σ , так как продольная сила \bar{D} уравновешена обратным направленным усилием, перпендикулярным к проведенному сечению и являющемуся равнодействующей нормальных внутренних сил. Составим условие равновесие части 1. $\sum x = 0$ (остальные обращаются в тождества).

На площадку dF действует усилие σdF . Для определения полного усилия необходимо просуммировать элементарные усилия, действующие по всему сечению mn .

Равнодействующая этих элементарных усилий называется нормальной силой, которая численно равна алгебраической сумме проекций на продольную ось стержня (X) всех внешних сил, приложенных к его оставленной части:

$$-P + N = 0, \text{ где } N = \int_F \sigma dF, \quad (2.1)$$

$$-P + \int_F \sigma dF = 0 \quad (2.2)$$

Так как продольные волокна по всему сечению испытывают одинаковое удлинение, то напряжение по всему сечению можно считать одинаковыми и

σ выносим за знак интеграла:

$$-P + \sigma \int_F dF = 0 , \quad (2.3)$$

$$\text{но } \int_F dF = F .$$

$$-P + \sigma F = 0 , \quad (2.4)$$

$$\sigma = \frac{P}{F} , \quad (2.5)$$

В тех случаях, когда нормальные силы в различных сечениях неодинаковы, удобно представить закон их изменения в виде графика, называемого эпюрой нормальных сил. Величина продольной силы не зависит от площади поперечного сечения.

2.2. Условие прочности

Растянутый (сжатый) стержень будет достаточно прочным, если во всех его поперечных сечениях напряжения σ не превышают некоторой величины, называемой допускаемым напряжением $[\sigma]$. ($[\sigma_{рас}]$ - растяжение, $[\sigma_{сж}]$ -- сжатие). Устанавливаем $[\sigma]$ на основании опытных данных. Для составления условия прочности стержня отыскиваем на растянутых и сжатых участках опасные сечения, напряжения в которых достигают наибольших значений по абсолютной величине.

Условие прочности записываем: $\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]$, или

$$[P] = [\sigma] \cdot F \quad (2.6)$$

Условие прочности позволяет решать задачи трех типов:

1) Подбор сечения (проектировочный расчет)

$$F \geq \frac{P}{[\sigma]}. \quad (2.7)$$

Определив площадь, можно принять наиболее рациональную форму поперечного сечения и ее размеры. Желательно, чтобы отклонение от требуемой площади было в пределах $\pm 5\%$.

2) Проверка прочности элемента

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma] \quad . \quad (2.8)$$

3) Определение допускаемой нагрузки на элемент: $[P] \leq [\sigma]F$.

При расчете стержней, ослабленных отверстиями или выточками, в формулы (2.6)÷(2.8) вместо полной площади поперечного сечения нужно подставлять площадь с учетом ослаблений:

$$F = F_{бр} - F_{осл} \quad , \quad (2.9)$$

где $F_{бр}$ - полная площадь сечения (без ослабления);

$F_{осл}$ - площадь ослаблений.

2.3. Деформации при растяжении (сжатии). Закон Гука

Законы изменения размеров стержня можно получить лишь на основании опытов с растяжением (сжатием) образцов изучаемого материала. Для осуществления подобных опытов в лабораториях пользуются специальными машинами, позволяющими деформировать образцы и доводить их до разрушения, измеряя требуемую для этого величину усилий. Одновременно с помощью тензометров измеряют деформации образцов.

Опыты показывают, что пока нагрузка на образец не достигла известного предела, удлинение образца пропорционально растягивающей силе P , длине образца l и обратно пропорционально площади поперечного сечения F .

Обозначая через Δl (рис. 2.3) приращение длины образца от силы, можно записать формулу, связывающую опытные данные:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}, \quad (2.10)$$

где E - коэффициент пропорциональности, различный для разных материалов; величина $\Delta l = l_1 - l$ абсолютное удлинение. Формула (2.10) имеет название закона Гука (закон о соотношении между величинами сил и производимыми ими деформациями).

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{EF} \quad (2.11)$$

Здесь $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$ - отношение абсолютного увеличения к первоначальной длине называется относительным удлинением и по своему числовому значению равно удлинению каждой единицы длины стержня. Разделим обе части (2.10) на длину l : $\frac{P}{F} = \sigma$, тогда

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ или } \sigma = \varepsilon \cdot E. \quad (2.12)$$

Таким образом, нормальное напряжение при растяжении или сжатии прямо

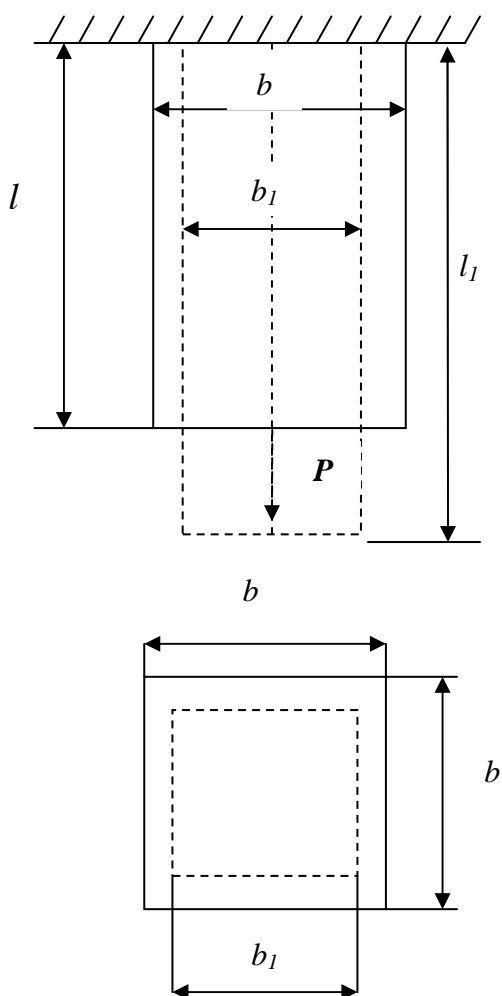


Рис. 2.3

пропорционально относительному удлинению или укорочению стержня.

E - это модуль упругости при растяжении материала.

Модуль упругости (модуль Юнга) характеризует упругие свойства материала, способность его сопротивляться упругой деформации при действии внешних сил.

В обычных расчетах принимают для большинства материалов $E_{\text{дв}} = E_{\text{н}}.$

Закон Гука (формулы (2.10) – (2.12)) только приближенно отражает результаты опытов, схематизируя их, не представляя совершенно точной зависимости. Все материалы при растяжении (сжатии) дают величины деформаций, более или менее отклоняющиеся от этого закона. Однако при практических расчетах отклонениями пренебрегают и пользуются законом Гука.

Из формул (2.10), (2.12) следует, что чем больше знаменатель, тем менее растяжим (податлив) или, как говорят, тем более жесток стержень.

Величина AF называется жесткостью стержня при растяжении (сжатии), зависит от материала стержня (E) и размеров поперечного сечения (F). Иногда удобнее пользоваться понятием относительной жесткости $\frac{EF}{l}$, где l - длина стержня.

Для нормальной работы некоторых конструкций необходимо, чтобы деформации их элементов не превышали допускаемой величины, тогда условие жесткости имеет вид

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon \leq [\varepsilon]. \quad (2.13)$$

После замены Δl по закону Гука могут быть решены задачи трех типов, аналогичных расчетам на прочность. Если условие жесткости выполнено, а условие прочности не удовлетворяется, то задача должна быть решена по условию прочности.

2.4. Коэффициент Пуассона

Стержни, подверженные действию растягивающих или сжимающих сил, как показали опыты, испытывают не только продольную, но и поперечную деформацию. Поперечный размер бруса (рис. 2.3) при растяжении уменьшается на величину

$$\Delta b = b - b_1 \quad (2.14)$$

Относительная поперечная деформация

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b}. \quad (2.15)$$

Опыты показывают, что для большинства материалов ε_1 в 3-4 раза меньше ε .

Абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации ε_1 к относительной продольной ε называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона:

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}. \quad (2.16)$$

Коэффициент μ зависит от свойств материала, изменяется в пределах от 0 до 0,5 (сталь - $0,25 \div 0,33$; чугун - $0,23 \div 0,27$; каучук - $0,47$; медь - $0,31 \div 0,34$). μ - является характеристикой упругих свойств материала.

Для изотропных материалов E и μ полностью характеризуют упругие свойства материала. Для анизотропных материалов нужно иметь E и μ в различных направлениях.

Для измерения числовой величины μ необходимо при растяжении (сжатии) стержня одновременно измерять продольные и поперечные деформации.

2.5. Изменение объема при растяжении или сжатии

Длина образца после деформации $l_1 = l(1 + \varepsilon)$. Площадь образца после деформации $F = b_1^2 = b^2(1 - \varepsilon_1)^2 = F(1 - \mu \cdot \varepsilon)^2$.

Объем после деформации

$$\begin{aligned} V_1 &= F_1 \cdot l_1 = F \cdot l \cdot (1 - \mu \cdot \varepsilon)^2 \cdot (1 + \varepsilon) = V \left[1 - 2\mu \cdot \varepsilon + (\mu \varepsilon)^2 \right] \cdot (1 + \varepsilon) = \\ &= V \cdot \left[1 - 2\mu \varepsilon + (\mu \varepsilon)^2 + \varepsilon - 2\mu \varepsilon^2 + (\mu \varepsilon)^2 \varepsilon \right] = \\ &= V \cdot \left[1 + \varepsilon(1 - 2\mu) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

В формулах (2.17) $V = F \cdot l$ - первоначальный объем; квадратом величины ε^2 пренебрегаем, так как ε до предела пропорциональности величина малая.

Относительное изменение объема:

$$\frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon(1 - 2 \cdot \mu) \quad (2.18)$$

В формулах (2.17) и (2.18) величину ε подставляем со своим знаком. При растяжении ε со знаком (+) и объем увеличивается. при сжатии ε со знаком (-) и объем уменьшается, поскольку в обоих случаях $\mu < 0,5$. При $\mu = 0,5$ объем при деформации не изменяется. Для резины $\mu \cong 0,5$ и объем практически не изменяется.

Пример. Для стального бруса (рис. 2.4, а) построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня и перемещении этих сечений. Модуль продольной упругости материала стержня $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, F_a , F_b , F_c - площади поперечных сечений соответственно участков a , b и c .

Решение. 1. Определяем реакции опор. Так как все действующие на брус

силы направлены вдоль его оси, то и реакция опоры (заделки) также должна действовать вдоль оси. Покажем ее на расчетной схеме в произвольном направлении и составим уравнение равновесия: $\sum Z = 0$, $P_1 - P_2 - R = 0$, откуда $R = P_1 - P_2 = 40 - 70 = -30 \text{ кН}$.

Знак "минус" свидетельствует о том, что направление R будет противоположным. В таких случаях целесообразно изобразить расчетную схему, на которой показать истинное направление (и величину) всех заданных и найденных сил (рис. 2.4, б).

2. Строим эпюру продольных сил, применяя метод сечений. Эпюру строим по участкам: a , b и c . Где-либо на участка проводим сечение 1-1 так, чтобы $Z_a \neq 0$ и $Z_a \neq a$, хотя $0 \leq Z_a \leq a$. Отбрасываем правую часть, а левую изображаем отдельно (рис. 2.4, в). Можно и наоборот, но это нецелесообразно. В сечении 1-1 прикладываем силу N_1 . Условимся всегда продольную силу N направлять от сечения, предполагая ее положительной (даже в том случае, когда очевидно, что ее направление будет обратным). Получив отрицательную величину N , будем знать, что здесь не растяжение, а сжатие бруса, и при построении эпюры N эти ординаты отложим вниз от базовой линии.

Итак в сечении 1 - 1 приложим силу N_1 , направленную от этого сечения (наружу), и составим уравнение равновесия: $\sum Z = 0$, $R + N_1 = 0$, откуда следует, что $N_1 = -R = -30 \text{ кН}$. Так как N_1 от переменной Z_a не зависит, то во всех сечениях участка a продольная сила будет равна N_1 , т.е. $N_a = N_1 = -30 \text{ кН}$. Знак "минус" указывает на то, что участок a сжат. Ординаты $N_a = -30 \text{ кН}$ откладываем вниз от базиса (рис. 2.4, е).

Аналогично поступаем при построении эпюры N на участках b и c (рис. 2.4 г, д).

$$\text{Сечение 2-2: } \sum Z = 0, R - P_2 + N_2 = 0, N_2 = P_2 - R = 70 - 30 = 40 \text{ кН}.$$

$$\text{Сечение 3 - 3: } \sum Z = 0, N_3 + P_1 = 0, N_3 = P_1 = 40 \text{ кН}.$$

После построения эпюры необходимо проверить ее по скачкам, которые должны быть только под теми сечениями, где на расчетной схеме стержня приложены внешние силы (в том числе реактивные).

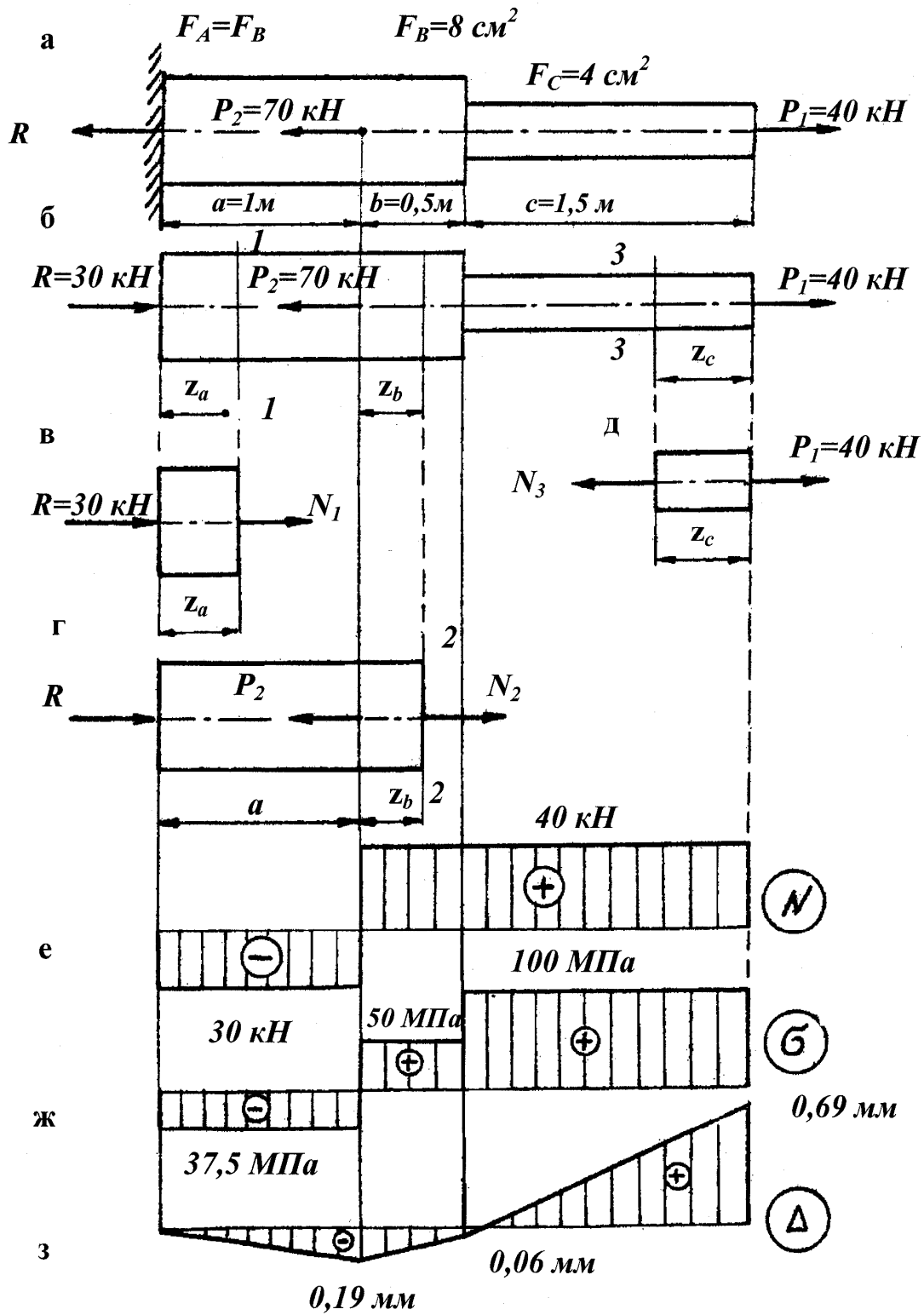


Рис. 2.4

Величина этих скачков должна быть равной соответствующим силам (см. рис. 2. 4, е).

3. Строим эпюру нормальных напряжений. Для этого необходимо каждую ординату эпюры N поделить на соответствующую ей площадь поперечного сечения бруса: $\sigma = P / F$. Поэтому $\sigma_a = \frac{-30000}{800} = -37,5 \text{ МПа}$,
 $\sigma_b = \frac{40000}{800} = 50 \text{ МПа}$, $\sigma_c = \frac{40000}{400} = 100 \text{ МПа}$.

Эпюра σ показана на рис. 2.4, ж.

4. Строим эпюру перемещений сечений бруса. Поперечные сечения стержня под действием заданных внешних сил смещаются относительно заделки. Обозначим неподвижное сечение в заделке I. В соответствии с законом Гука смещение любого участка a определяется выражением $\Delta Z_a = \frac{N_a \cdot Z_a}{E \cdot F_a}$, $0 \leq Z_a \leq a$, из которого следует, что закон изменения перемещений сечений линейный. Чтобы построить эпюру перемещений, достаточно найти перемещения граничных сечений каждого участка и соединить их прямой линией, т.е. надо вычислить перемещения сечений II, III и IV (см. 2.4, а).

Смещение сечения II будет равно абсолютной деформации участка a :

$$\Delta_{II} = \Delta a = \frac{-30000 \cdot 1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 800} = -0,19 \text{ мм},$$

смещение сечения III будет равно абсолютной деформации двух участков – a и b :

$$\Delta_{III} = \Delta a + \Delta b = -0,19 + \frac{40000 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 800} = -0,06 \text{ мм},$$

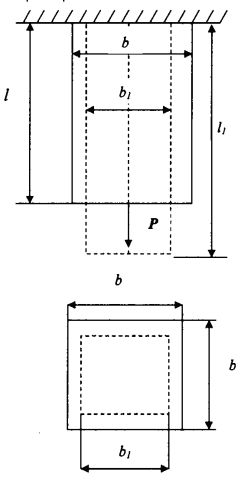
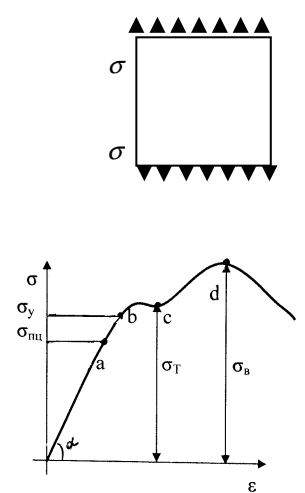
смещение сечения IV:

$$\Delta_{IV} = \Delta a + \Delta b + \Delta c = -0,06 + \frac{40000 \cdot 1500}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} = -0,69 \text{ мм}$$

Эпюра перемещений представлена на рис. 2.4, з.

Основные результаты п. 2 показаны в табл. 2.1.

Таблица 2.1

	Деформации	Напряжения	Закон Гука	Условия прочности	Условия жесткости
Растяжение (сжатие)	$\Delta l = l_1 - l$ - абсолютная деформация; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ - относительная деформация; $\Delta b = b - b_1$ - абсолютная поперечная деформация; $\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b}$ - относительная поперечная деформация; $\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ - коэффициент Пуассона $ F = N $	$\sigma = \frac{P}{F}; \operatorname{tg} \alpha = E$ $\sigma_{i\ddot{o}}$ - предел пропорциональности $\sigma_{\acute{o}}$ - предел упругости σ_T - предел текучести (деформации растут без увеличения нагрузки) σ_B - предел прочности (выдерживает нагрузку, не разрушаясь)	$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}$ $\sigma = \varepsilon \cdot E$ $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$	$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F} \leq [\sigma]$ $[\sigma] = \frac{\sigma_y}{S}$ S - запас прочности	$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} \leq [\Delta l]$ EF - жесткость поперечного сечения $c = \frac{EF}{l} \left[\frac{\dot{l}}{\ddot{l}} \right]$ - жесткость стержня $\frac{1}{\ddot{n}}$ - податливость стержня $\left[\frac{\ddot{l}}{\dot{l}} \right]$
					

Вопросы для самоконтроля

1. Как строится диаграмма растяжения?
2. Что называется пределом пропорциональности?
3. Что называется пределом текучести?
4. Что называется пределом прочности?
5. Что называется пределом упругости?
6. Как формируется закон Гука?
7. Что называется модулем упругости?
8. Что называется коэффициентом поперечной деформации?
9. От каких факторов зависит запас прочности?
10. Что называется коэффициентом запаса прочности?
11. Как формулируется условие прочности?

3. СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

Правильно оценить прочность стержня можно, лишь зная полностью его напряженное состояние, а это значит нужно уметь вычислять напряжения не только по сечению, перпендикулярному оси, но и по любому.

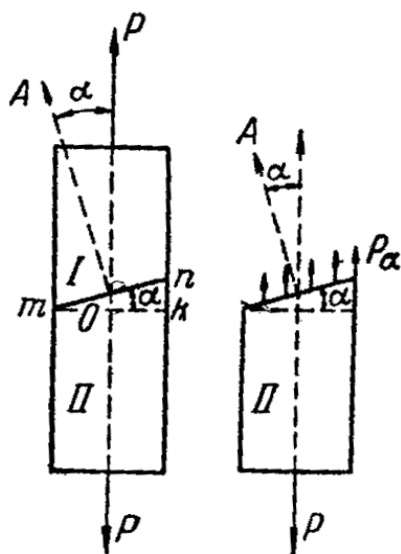


Рис. 3.1

Вычислим напряжения, действующие по какому-то наклонному сечению mn . Стержень (рис. 3.1) растянут силами P . Сечение mn разделит стержень на две части I и II и составит угол с поперечным сечением mk , перпендикулярным к оси, равный α . Тот же угол составляет между собой и нормали к этим сечениям. За положительное направления отсчета этого угла α возьмем направление против часовой стрелки. Нормаль OA , направленную наружу по отношению к

отсеченной части стержня, будем называть внешней нормалью к сечению mn . Площадь сечения $mk - F_0$, площадь сечения $mn - F_\alpha$.

Отбросим мысленно верхнюю часть стержня I и заменим действие на нижнюю напряжениями p_α . Для равновесия нижней части напряжения p_α должны уравновешивать силу \bar{P} и быть направлены параллельно оси стержня. Здесь напряжения уже не перпендикулярны к площадке, по которой они действуют. Считаем, что напряжения p_α равномерно распределены по площади проведенного разреза. Тогда $p_\alpha = \frac{P}{F_\alpha}$. Но так как $F_\alpha = \frac{F_0}{\cos \alpha}$, то

$$p_\alpha = \frac{P \cos \alpha}{F_0} = \sigma_0 \cos \alpha. \text{ Здесь } \sigma_0 - \text{нормальное напряжение на площадке } mk,$$

перпендикулярной к растягивающей силе. При изменении угла α меняется и

величина полных напряжений p_α .

Для того, чтобы при любом угле наклона иметь дело всегда с одними и теми же видами напряжений, разложим напряжения p_α на составляющие в плоскости mn перпендикулярно к ней: касательные напряжения τ_α и нормальные σ_α (рис. 3.2).

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha; \quad (3.1)$$

$$\tau_\alpha = P_\alpha \cdot \sin \alpha = \sigma_0 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (3.2)$$

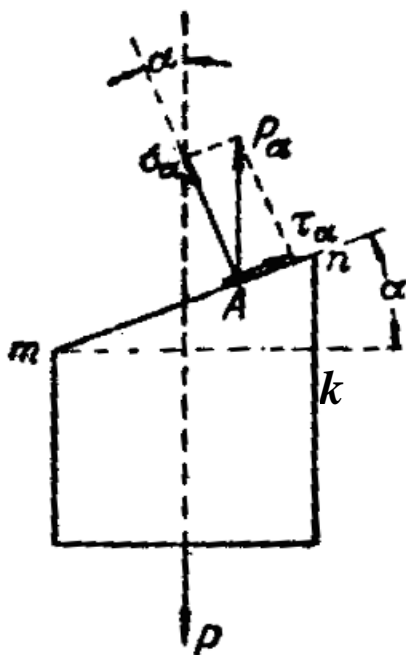


Рис. 3.2

Знаки напряжений: растягивающие напряжения σ_α , совпадающие с направлением внешней нормали, будем считать положительными; нормальные напряжения, обратного направления снимающие-отрицательными, касательные напряжения будем считать положительными, если их направление таково, что внешняя нормаль для совмещения с ними должна повернуться по часовой стрелке (если τ_α дает момент по часовой стрелке относительно центра растягиваемого элемента) (рис. 3.3).

Напряжения σ_α и τ_α соответствуют двум видам деформаций, которые испытывает материал стержня. Выделим из растянутого стержня двумя наклонными параллельными сечениями 1-1 и 2-2 тонкий слой материала (рис. 3.4).

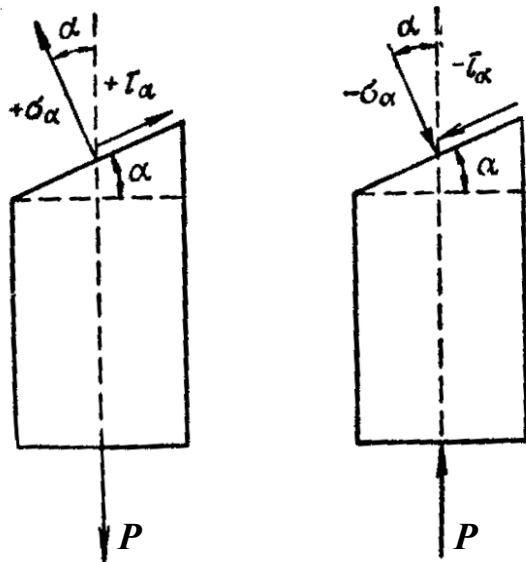


Рис. 3.3

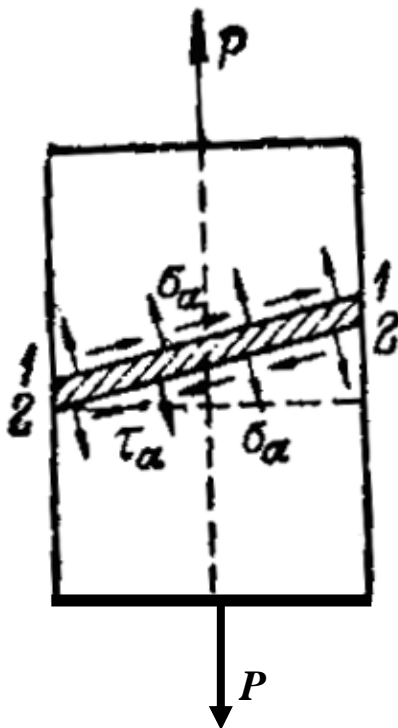


Рис. 3.4

На обе плоскости будут действовать σ_α и τ_α . σ_α соответствует растяжению выделенного слоя, τ_α - стремятся сдвинуть сечение 1-1 и 2-2 параллельно друг другу. Для того, чтобы убедиться в достаточном сопротивлении материала стержня разрушению, необходимо установить наибольшие значения величин σ_α и τ_α в зависимости от положения площадки mn . Из (3.1) и (3.2) следует, что σ_α достигает своего наибольшего значения, когда $\cos^2 \alpha$ будет равен 1 и угол $\alpha = 0$. Максимум же получится для τ_α при $\sin 2\alpha = 1$, или при $2\alpha = 90^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$. Величины этих наибольших напряжений будут равны:

$$\max \sigma_\alpha = \frac{P}{F_0}; \quad \max \tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2}.$$

Таким образом, наибольшие нормальные напряжения действуют в данном случае по площадкам, перпендикулярным к оси стержня; наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, составляющим угол 45° с направлением оси стержня, и равны половине наибольших нормальных напряжений.

3.1. Понятие о главных напряжениях. Виды напряженного состояния материала

На практике, возможны случаи, когда под действием внешних сил элемент материала подвергается растяжению или сжатию по двум и трем

направлениям, т.е. находится в условиях сложного напряженного состояния.

Из (3.1) и (3.2) следует, что по сечениям, перпендикулярным к оси растянутого стержня ($\alpha = 0$), возникают только нормальные напряжения ($\tau_\alpha = 0$), а по сечениям, параллельным его оси ($\alpha = 90^\circ$), нет ни σ_α , ни τ_α ($\sigma_\alpha = 0$, $\tau_\alpha = 0$).

Такие площадки, по которым нет касательных напряжений, называются главными; нормальные напряжения, действующие по этим площадкам, называются главными напряжениями.

В теории упругости доказывается, что в каждой точке любого напряженного тела можно провести три взаимно перпендикулярных главных площадки, через которые пересекаются три главных (нормальных) напряжения; из них две имеют экстремальные значения: одно является наибольшим, другое - наименьшим, третье - промежуточным.

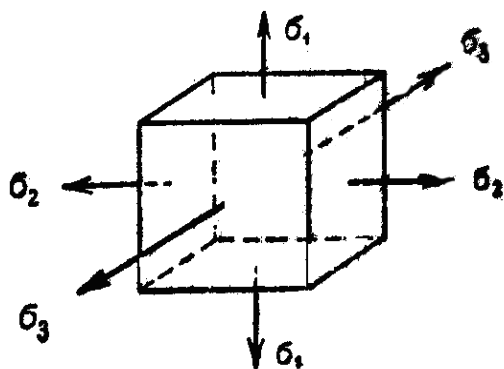


Рис. 3.5

В каждой точке напряженного тела можно выделить элементарный кубик, гранями которого служат главные площадки (рис. 3.5). Главные напряжения условимся обозначать буквами: σ_1 - наибольшее по алгебраической величине; σ_3 -наименьшее по алгебраической величине; σ_2 -промежуточное по алгебраической величине. $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Различают три вида напряженного состояния:

1) объемное напряженное состояние - когда все три главных напряжения не равны нулю (случай растяжения или сжатия по трем взаимно перпендикулярным направлениям).

2) Плоское напряженное состояние - когда одно главное напряжение равно нулю (случай растяжения или сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям).

3) Линейное напряженное состояние - когда два главных напряжения равны нулю (случай растяжения или сжатия в одном направлении).

3.2. Напряжения при плоском напряженном состоянии

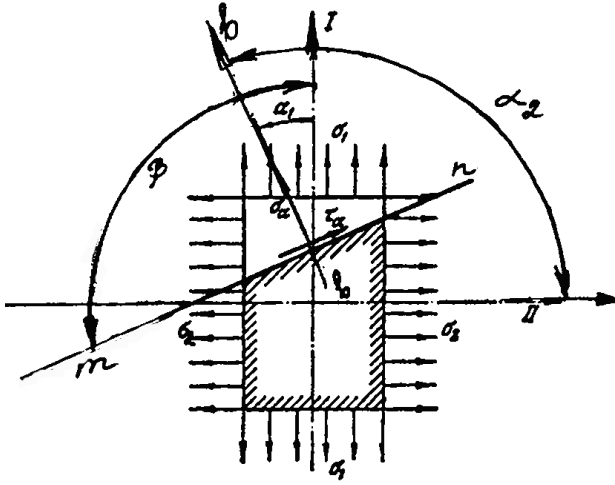


Рис. 3.6

На прямоугольный параллелепипед (рис. 3.6) действуют по граням главные напряжения σ_1 и σ_2 . Эти напряжения будем считать растягивающими. По фасадным граням элемента никаких напряжений нет. Следовательно, $\sigma_3 = 0$. Найдем наибольшие нормальные и касательные напряжения по сечениям, перпендикулярным к фасадным граням.

Напряжения σ_α и τ_α зависят от σ_1 и σ_2 . Величины σ_α и τ_α получим, рассматривая действие σ_1 и σ_2 отдельно и складывая результаты с учетом $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 (90^\circ + \alpha_1) = \\ &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1,\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\tau_\alpha &= \frac{1}{2}(\sigma_1 \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \sin 2\alpha_2) = \frac{1}{2}[\sigma_1 \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \sin 2(\alpha_1 + 90^\circ)] = \\ &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_1.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Пользуясь (3.3) и (3.4), найдем напряжения по площадке $b-b$, перпендикулярной к mn , составляющей с направлением наибольшего главного напряжения угол $\beta = \alpha_1 + 90^\circ$:

$$\begin{aligned}\sigma_\beta &= \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta = \sigma_1 \cos^2 (90^\circ + \alpha_1) + \sigma_2 \sin^2 (90^\circ + \alpha_1) = \\ &= \sigma_1 \sin^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_1,\end{aligned}\quad (3.5)$$

$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2(\alpha_1 + 90^\circ) = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha_1. \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) получим, что:

1) $\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}$, т.е. сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадям постоянна и равна сумме главных напряжений.

2) $\tau_{\beta} = -\tau_{\alpha}$ - касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку (закон парности касательных напряжений).

3) Из (3.3) и (3.4) видно, что σ_{α} и τ_{α} зависят от угла наклона площадки.

Чтобы найти их экстремальные значения, исследуем (3.3) на \max и \min :

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha + 2\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha = 0; \quad \frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = 0.$$

Условие максимума совпадает с условием равенства нулю касательных напряжений, откуда следует, что $\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$ получит наибольшее значение при $\alpha = 0$ или при $\alpha = 90^\circ$. Так как $\sigma_1 > \sigma_2$, то $\max \sigma_{\alpha} = \sigma_1$ (при $\alpha = 0$), $\min \sigma_{\alpha} = \sigma_2$ (при $\alpha = 90^\circ$).

Таким образом наибольшее и наименьшее нормальное напряжение в данной точке - это главные напряжения σ_1 и σ_2 , действующие до взаимно перпендикулярным площадям, свободным от касательных напряжений.

Наибольшее значение τ_{α} будет $\max \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ (при $\sin 2\alpha = 1$, при $\alpha = 45^\circ$).

По площадкам, параллельным σ_2 , наибольшие касательные напряжения $\max \tau = \frac{\sigma_1}{2}$.

3.3. Нахождение главных напряжений

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha - \sigma_1 \sin^2 \alpha - \sigma_2 \cos^2 \alpha = \\ = \sigma_1 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sigma_2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \sigma_1 \cos^2 \alpha - \sigma_2 \cos^2 \alpha = \\ = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos^2 \alpha \\ 2\tau_{\alpha} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha, \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}},$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}) \pm \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau_{\alpha}^2} \right] \\ \sigma_2 \end{cases}$$

3.4. Вычисление деформаций при плоском и объемном напряженном состоянии

При проверках прочности элемента, на грани которого действуют напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 , ставится вопрос о деформациях. Называя ребро, параллельное главному напряжению σ_1 первым, а ребра, параллельные σ_2 и σ_3 вторым и третьим, определим относительные продольные деформации элемента в направлении этих ребер, отдельно рассматривая влияние каждого из направлений и складывая результаты. Под действием σ_1 элемент в направлении первого ребра получит ε'_1 , равное $\varepsilon'_1 = \frac{\sigma_1}{E}$.

В то же время по отношению к напряжениям σ_2 и σ_3 первое ребро является поперечным размером, поэтому под действием σ_2 и σ_3 элемент в направлении первого ребра испытывает относительное укорочение

$$\varepsilon''_1 = -\mu \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon'''_1 = -\mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Полная относительная деформация элемента в направлении первого

ребра выразится $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right)$.

В результате по аналогии имеем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right), \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \mu \left(\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} \right).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Если какие-то σ_1 , σ_2 , σ_3 будут сжимающими, то в формулу (3.7) они ставятся со знаком минус.

При плоском напряженном состоянии:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E}, \\ \varepsilon_3 &= -\mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Вычислим изменение объема прямоугольного параллелепипеда со сторонами a , b , c . До деформации объем $V = abc$.

После деформации $V_1 = (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) \cdot (c + \Delta c)$, или пренебрегая произведениями малых деформаций, имеем:

$$V_1 = abc + ab\Delta c + ac\Delta b + bc\Delta a = V_0 \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Относительное изменение объема равно:

$$\Theta = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.\tag{3.9}$$

Подставим в (3.9) (3.7), получим:

$$\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.10)$$

Если $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, то

$$\Theta = \frac{1-2\mu}{E}3\sigma. \quad (3.11)$$

Величину $\frac{E}{3(1-2\mu)}$ называют модулем объемной деформации и обозначают буквой K , тогда (3.11) будет иметь вид:

$$\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3K}.$$

Изменение объема зависит только от суммы главных напряжений, а не от их соотношения. Поэтому кубик получит одно и то же Θ , будут ли по его граням действовать разные по величине $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ или одинаковые:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

В последнем случае все ребра кубика получают одинаковую деформацию

$$(\text{рис. 3.5}) \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3 \cdot 3K} = \frac{\sigma_n}{3K}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие случаи деформации бруса называют центральным растяжением?
2. Как вычисляют значение продольной силы в произвольном поперечном сечении бруса?
3. Что представляет собой эпюра продольных сил? Как она строится?
4. Как распределяют нормальные напряжения в поперечном сечении бруса при его центральном растяжении (сжатии)? Чему они равны?
5. Как используется гипотеза плоских сечений для выяснения закона распределения напряжений в поперечном сечении растянутого (сжатого) стержня?

6. Как строится эпюра нормальных напряжений?
7. Как вычисляют нормальные и касательные напряжения в наклонных сечениях бруса? В каких сечениях растянутого бруса возникают наибольшие нормальные и в каких - наибольшие касательные напряжения?
8. Что такое абсолютная продольная деформация?
9. Что представляет собой относительная продольная деформация?
10. Какова размерность абсолютной и относительной продольных деформаций?
11. Что представляет собой модуль продольной упругости? Как влияет величина E на деформацию бруса?
12. Что такое жесткость поперечного сечения при растяжении (сжатии)?
13. Как формулируется закон Гука? Напишите формулы абсолютной и относительной продольных деформаций бруса.
14. Что называется абсолютной и относительной поперечными деформациями бруса?
15. Что такое коэффициент Пуассона?
16. Что такое предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести, предел прочности (или временное сопротивление)?

4. СДВИГ. ПОНЯТИЕ О СДВИГЕ

При простом растяжении или сжатии две части стержня, разделенные наклонным сечением, стремятся не только оторваться друг от друга, но и сдвинуться одна относительно другой.

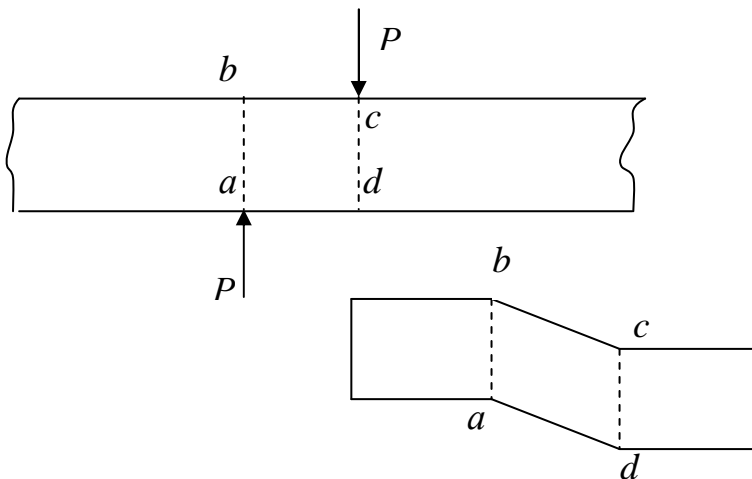


Рис.4.1

На практике целый ряд деталей и элементов конструкций работает в таких условиях, что внешние силы стремятся их разрушить путем сдвига (пример - болтовое и заклёпочное соединение).

Деформация сдвига (рис.4.1) с достаточной степенью приближения может

быть практически получена в том случае, когда на рассматриваемый брус с противоположных сторон действуют две равные силы, перпендикулярные к оси бруса и направленные в противоположные стороны (резка прутьев ножницами). Левая часть бруса отделяется от правой по некоторому сечению "ab". На практике сдвиг в чистом виде подучить трудно, так как обычно деформация сдвига сопровождается другими видами деформаций, чаще всего деформацией изгиба.

Внутренняя сила, возникающая в элементе $abcd$ под действием внешних усилий может быть получена из условия равновесия одной из частей бруса с помощью метода сечения, (рис.4.2), $Q_y = P$, т.е.

$$\int_F \tau dF = Q_y. \quad (4.1)$$

Принимая допущение, что внутренние усилия в сечении стержня, характеризующиеся касательными напряжениями τ , распределены по площади поперечного сечения равномерно, получим: $Q_y = P = \tau \cdot F \Rightarrow$

$$\tau = \frac{P}{F}. \quad (4.2)$$

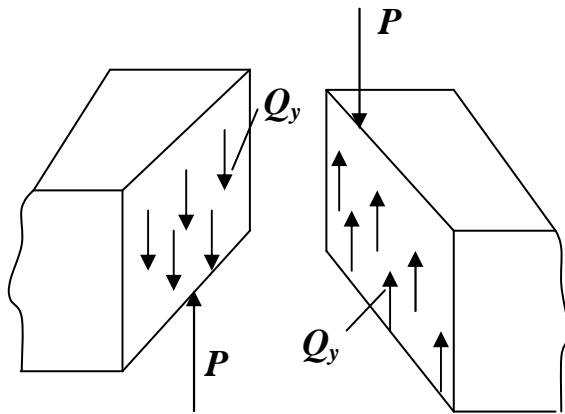


Рис. 4.2

Принятые допущения о равномерности распределения по сечению почти никогда на практике не имеют места; в действительности τ у верхней и нижней граней стержня равны нулю. Однако принятое допущение при расчете реальных конструкций себя оправдывает и поэтому широко применяется в инженерной практике.

Равномерное распределение τ по высоте сечения возможно, когда по верхней и нижней грани рассматриваемого элемента бруса будут действовать τ равные по величине, но противоположные по знаку, т.е. в случае чистого сдвига. При проверке прочности таких элементов на первый план выступают касательные напряжения. Проверка прочности таких соединений на сдвиг обычно производится в предположении равномерного распределения касательных напряжений по площади сечения по формуле

$$\tau = \frac{P}{F} \leq [\tau] \quad (4.3)$$

Чтобы определить $[\tau]$, необходимо было бы найти экспериментальным путем величину предела прочности и предела текучести для стержня, в сечениях которого возникали бы только касательные напряжения и, задавшись коэффициентом запаса " k ", определить $[\tau]$. Такой опыт поставить нельзя, так как при испытании на срез соединительного элемента (болт, заклепка и т.д.) в

поперечных его сечениях будут действовать не только τ , но и σ , деформация будет сложной. Это заставляет на основании некоторых теоретических соображений определять $[\tau]$ без рассмотрения действительных достаточно сложных условий работы на сдвиг. Теоретическое значение $[\tau]$ при установлении норм корректируется данными опытов. Рассмотрим элемент материала, по граням которого действуют только касательные напряжения – такой вид плоского напряженного состояния называется чистым сдвигом. Известно $[\sigma]$ для данного материала, необходимо найти из условия прочности рассматриваемого элемента (рис. 4.3). Эту задачу сдвига можно

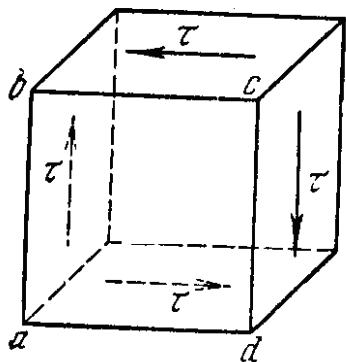


Рис.4.3

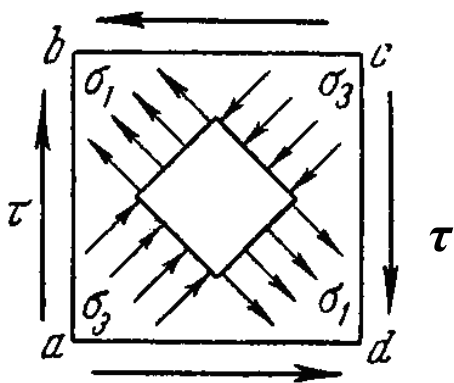


Рис. 4.4

свести к задаче проверки прочности при сложном напряженном состоянии. Для решения задачи необходимо определить значения главных напряжений и затем применять теории прочности. По фасадной грани $abcd$ элемента нет никаких напряжений τ – следовательно это одна из главных площадок, на которой главное напряжение равно нулю. Два других напряжения определим по аналитическим формулам $\sigma_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2} = \pm \tau$.

Таким образом, если рассечь элемент при условии, что грань $abcd$ – квадрат (рис. 4.4), диагональными плоскостями, то по сечению "ac" будут действовать

сжимающие $\sigma_3 = -\tau$, а по сечению "bd" растягивающие σ_1 . Следовательно, чистый сдвиг эквивалентен комбинации двух равных по числовой величине нормальных напряжений – одного растягивающего и другого сжимающего, каждое из этих нормальных напряжений равно по

числовой величине τ , вызывающему чистый сдвиг; площадки, по которым действуют главные напряжения, составляют угол 45° с площадками действия только касательных напряжений.

Весь элемент испытывает деформацию сдвига, а материал этого элемента в то же время претерпевает в некоторых направлениях растяжение или сжатие.

Зная σ_1 , σ_2 и σ_3 , составим условие прочности для этого элемента, применяя теории прочности, за исключением первой устаревшей.

а) Теория наибольших относительных удлинений

$$[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\sigma] \quad \text{где } \sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau;$$

$$\text{тогда } [\tau - \mu(0 - \tau)] \leq [\sigma] \rightarrow \tau(1 + \mu) \leq [\sigma].$$

Отсюда

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu} \leq [\tau], \quad (4.4)$$

$[\tau]$ - допускаемая величина касательного напряжения при чистом сдвиге. Для стали $\mu \cong 0,3 \rightarrow$

$$[\tau] = (0,7 \div 0,8)[\sigma]. \quad (4.5)$$

б) Теория наибольших касательных напряжений:

$$[\sigma_1 - \sigma_3] \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad [\tau - (-\tau)] \leq [\sigma] \rightarrow \tau \leq \frac{[\sigma]}{2} = [\tau],$$

$$[\tau] = 0,5[\sigma]. \quad (4.6)$$

в) Энергетическая теория прочности:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3} \leq [\sigma]$$

$$\sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2} \leq [\sigma] \rightarrow \tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = [\tau],$$

$$[\tau] = 0,57[\sigma] \cong 0,6[\sigma]. \quad (4.7)$$

Ввиду того, что результаты существенно отличаются друг от друга,

вопрос о выборе теории прочности приобретает важное практическое значение. В настоящее время для пластичных материалов следует считать наиболее достоверной энергетическую теорию прочности: $[\tau] = 0,6[\sigma]$. Для заклепочных соединений, условия работы которых не отвечают случаю чистого сдвига в зависимости от способа изготовления заклёпанного соединения $[\tau]$, принимают в пределах $[\tau] = (0,6 \div 0,8)[\sigma]$.

4.1. Связь между напряжениями и деформацией при чистом сдвиге

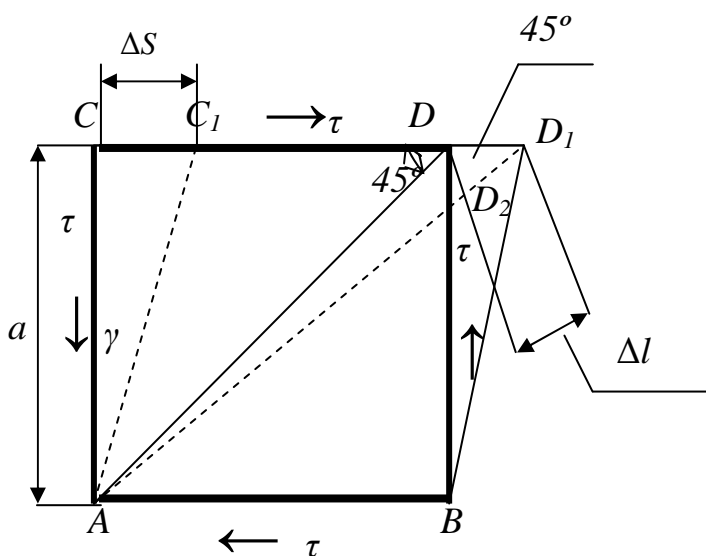


Рис. 4.5

Рассмотрим элемент $ACDB$, закрепленный гранью AB и испытывающий чистый сдвиг (рис.4.5). Под действием τ грань CD сдвинется на величину $\ddot{A}\ddot{A}_1 = \tilde{N}\tilde{N}_1 = \Delta S$, называемую абсолютным сдвигом. Элемент перекосится, прямые углы изменятся на величину γ , называемую относительным сдвигом (углом сдвига), который в пределах упругих деформаций весьма мал:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (4.8)$$

Относительный сдвиг равен абсолютному, деленному на расстояние между сдвигающимися плоскостями (измеряется в радианах).

γ - характеризует числовым образом деформацию сдвига. Удлинение диагонали AD можно связать, с одной стороны, с действующими напряжениями τ , с другой - с относительным сдвигом; комбинируя обе зависимости, найдем связь между τ и γ .

$\Delta l = \Delta D_1 - \Delta D_2$ - удлинение диагонали AD , угол при точке D в виду малости деформаций, можно принять равным 45° :

$$\Delta l = \Delta S \cos 45^\circ; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l}{\frac{a}{\sin 45^\circ}} = \frac{\Delta S}{a} \cos 45^\circ \sin 45^\circ = \frac{\Delta S}{2a}; \quad \text{но} \quad \frac{\Delta S}{a} = \gamma,$$

тогда

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \gamma. \quad (4.9)$$

С другой стороны, относительное удлинение диагонали под действием $\sigma_1 = \tau$ и $\sigma_3 = -\tau$ равно:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\tau}{E} (1 + \mu). \quad (4.10)$$

Приравняв (4.9) и (4.10), получим $\frac{1}{2} \gamma = \frac{\tau}{E} (1 + \mu), \rightarrow \tau = \frac{E}{2(1 + \mu)} \cdot \gamma$, т.е.

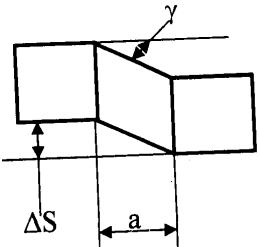
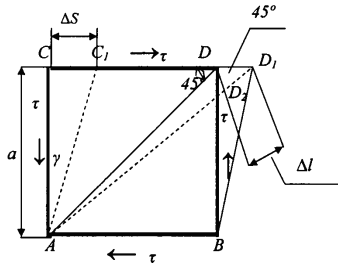
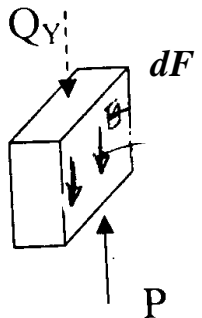
касательные напряжения пропорциональны относительному сдвигу (закон Гука при сдвиге). $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ называется модулем упругости при сдвиге или модулем сдвига. Величина абсолютного сдвига зависит от τ и размеров выделенного элемента $\tau = G \cdot \gamma$.

Для удобства пользования все результаты раздела показаны в табл. 4.1.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется абсолютным и относительным сдвигом?
2. Закон Гука или сдвиг.
3. Чему равен модуль сдвига G ?
4. Какова зависимость между G , E и μ для изотропного тела?
5. Под каким углом к исходным касательным напряжениям τ находятся главные площадки?
6. Возможно ли при сдвиге наличие нормальных напряжений?
7. Как формулируется условие прочности при сдвиге?

Таблица 4.1

	Деформации	Напряжения	Закон Гука	Условия прочности	Условия жесткости
Сдвиг, срез	$\gamma = \frac{\Delta S}{a}$ <p>- относительный сдвиг</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$ </div> <p>- модуль сдвига</p> <p>га</p>  	$Q_y = P$ $Q_y = \int_A \tau \cdot dF$ <p>поперечная сила</p> $\tau = \frac{Q_y}{F}$ $\operatorname{tg} \alpha = G$ 	$\Delta S = \frac{Q \cdot a}{G \cdot F}$ $\tau = \gamma \cdot G$ $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ <p>при кручении</p>	$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau]$ $[\tau] = \frac{\tau_T}{S_T}$ <p>для пластических материалов</p> $[\tau] = \frac{\tau_b}{S_b} \text{ - для хрупких материалов}$ $[\tau] = (0,5 \dots 0,6) [\sigma]$	$\Delta S = \frac{Q_y \cdot a}{G \cdot F} \leq [\Delta S]$ <p>$G \cdot F$ - жесткость поперечного сечения</p> $\frac{GF}{a} \text{ - жесткость стержня}$

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Сопротивление стержня различным видам деформации зависит не только от материала и размеров стержня, но и от формы и расположения поперечных сечений.

Простейшей геометрической характеристикой является площадь поперечного сечения. Она входит в расчетные формулы, определяющие прочность и жесткость при простом растяжении и сжатии. В случаях кручения, изгиба и сложного сопротивления мы встречаемся с более сложными геометрическими характеристиками. К ним относятся статические моменты, моменты инерции, радиусы инерции, моменты сопротивления.

5.1. Статические моменты площади. Центр тяжести поперечного сечения

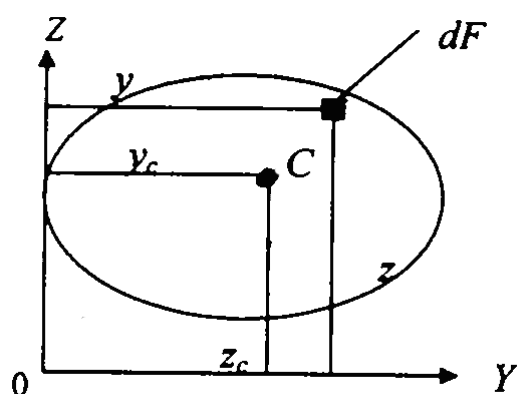


Рис. 5.1

Статическим моментом площади сечения называется сумма произведений элементарных площадей dF на расстояние до соответствующей оси (рис.5.1).

$$\left. \begin{aligned} S_z &= \int_F y dF \\ S_y &= \int_F z dF \end{aligned} \right\}. \quad (5.1)$$

Пусть Z_c и Y_c - координаты центра тяжести фигуры. По аналогии с выражением для моментов сил, на основании теоремы о моменте равнодействующей можно написать:

$$S_z = F y_c, \quad S_y = F z_c, \quad (5.2)$$

где F - площадь фигуры.

Отсюда координаты центра тяжести:

$$y_c = \frac{S_z}{F}, \quad z_c = \frac{S_y}{F}. \quad (5.3)$$

Из (5.3) следует, что статические моменты площади относительно центральных осей (проходящих через центр тяжести) равны нулю.

Пример:

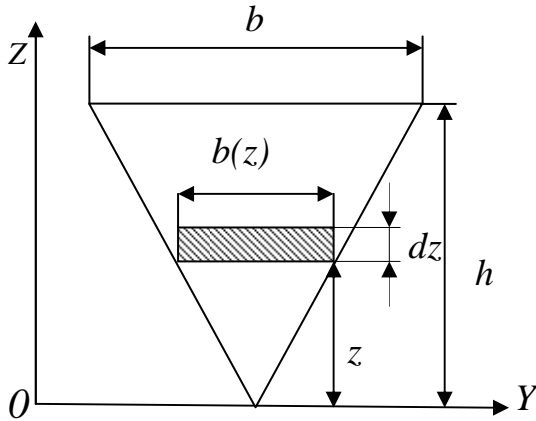


Рис. 5.2

Вычислить статические моменты площади треугольника (рис. 5.2) относительно оси Y , проходящей через вершину параллельно основанию. На расстоянии z выделим элементарную площадь параллельно оси Y .

Решение:

$$dF = b(z)dz, \quad \frac{b(z)}{b} = \frac{z}{h}, \quad b(z) = \frac{b}{h}z$$

$$S_y = \int_F z dF = \int_0^h \frac{b}{h} z^2 dz = \frac{b}{h} \int_0^h z^2 dz = \frac{bh^2}{3}.$$

Расстояние от центра тяжести фигуры до оси Y находим из (5.3).

$$Z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{b \cdot h^2 \cdot 2}{3 \cdot bh} = \frac{2}{3}h.$$

Для вычисления статического момента сложной фигуры ее разбивают на части, для каждой из которых известна площадь (F_c) и положение центра тяжести (z_i, y_i).

Статический момент площади всей фигуры относительно данной оси определяется как сумма статических моментов составных ее частей.

$$\left. \begin{aligned} S_z &= F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum_{i=1}^n F_i y_i \\ S_y &= F_1 z_1 + F_2 z_2 + \dots + F_n z_n = \sum_{i=1}^n F_i z_i \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

На основании (5.4) находим координаты центра тяжести сложной фигуры:

$$\left. \begin{aligned} Z_c &= \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \\ Y_c &= \frac{S_z}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

5.2. Моменты инерции плоских фигур

Осевым или экваториальным моментом инерции площади фигуры называется сумма произведений элементарных площадей на квадрат их расстояния от данной оси.

$$I_z = \int_F y^2 dF, \quad I_y = \int_F z^2 dF. \quad (5.6)$$

Размерность моментов инерции – см^4 . Осевые моменты инерции всегда положительны, поскольку положительной считается площадь:

$$I_z = i_z^2 F, \quad I_y = i_y^2 F, \quad I_p = i_p^2 F.$$

Найдем значения осевых моментов для некоторых простых фигур.

Прямоугольник (рис. 5.3):

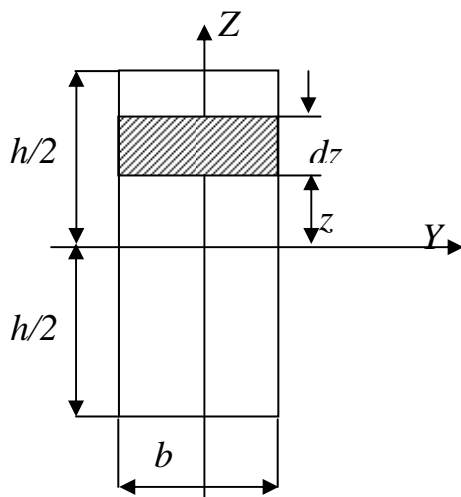


Рис.5.3

$$I_y = \int_F z^2 dF, \quad dF = b \cdot dz,$$

$$I_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b z^2 dz = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{2b \left(\frac{h}{2} \right)^3}{3} = \frac{bh^3}{12}.$$

$$\text{Очевидно: } I_z = \frac{bh^3}{12}.$$

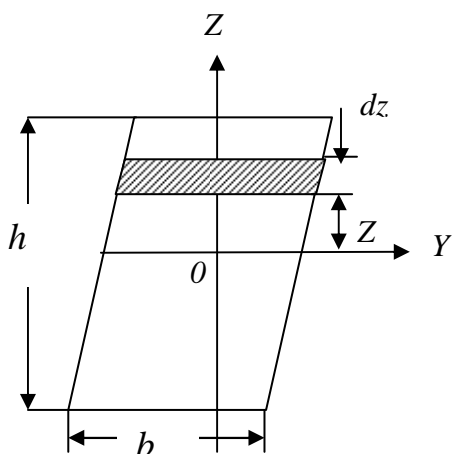


Рис. 5.4

Заметим, что величина I_y не изменяется, если сдвинуть все полоски $dF = b \cdot dz$ параллельно самим себе. То есть для параллелограмма (рис.5.4)

$$I_y = \frac{bh^3}{12}.$$

Треугольник (рис.5.5):

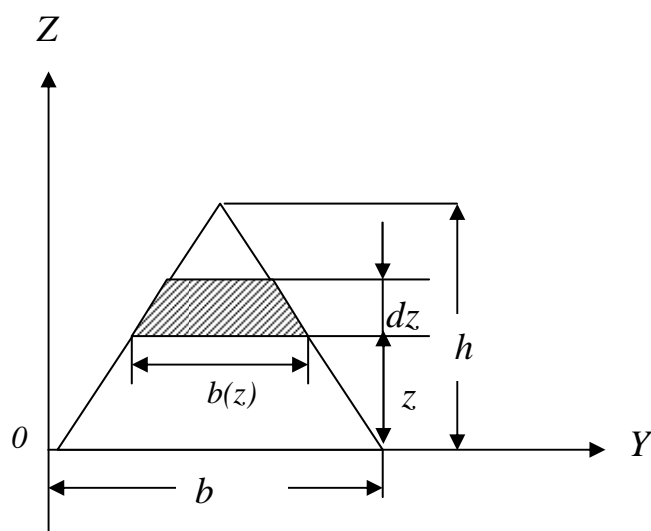


Рис. 5.5

$$I_y = \int_F z^2 dF, \quad dF = b(z) \cdot dz,$$

$$\frac{b(z)}{b} = \frac{h-z}{h}, \quad b(z) = \frac{b}{h}(h-z),$$

$$I_y = \int_F bz^2 dz = \frac{b}{h} \int_0^h z^2 (h-z) dz = \frac{bh^3}{12}.$$

Круг (рис. 5.6):

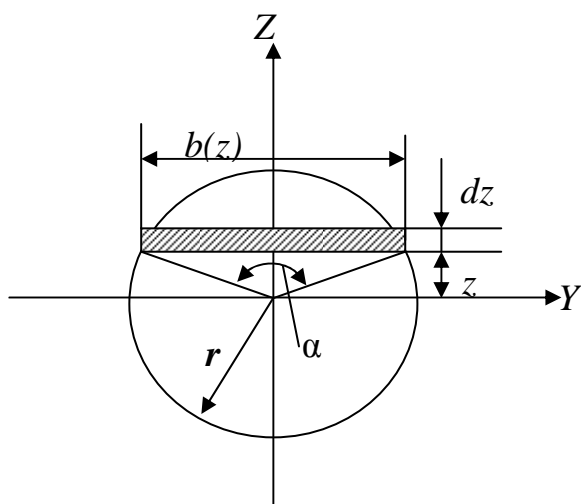


Рис. 5.6

$$I_y = \int_F z^2 dF, \quad dF = b(z) \cdot dz.$$

Так как верхняя и нижняя половины сечения одинаковы, то вычисление момента инерции достаточно провести для одной половины, а результат удвоить. Пределами для изменения z

$$\text{будут } 0 \text{ и } r / \quad I_y = 2 \int_0^r z^2 b(z) dz.$$

Введем новую переменную интегрирования – угол α , тогда

$$z = r \cos \frac{\alpha}{2}, \quad dz = -\frac{1}{2} r \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha, \quad b(z) = r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Пределы при $z = 0$ $\alpha = \pi$, при $z = r$ $\alpha = 0$.

Следовательно,

$$I_y = -2 \cdot \int_0^\pi 2 \cdot r^4 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} d\alpha = \frac{r^4}{2} \cdot \int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi \cdot r^4}{4}.$$

Всякая упругая ось, проходящая через центр тяжести, есть ось симметрии, поэтому: $I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$.

5.3. Полярный момент инерции

Полярным моментом инерции площади фигуры относительно данной точки (полюса 0) называется сумма произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний от полюса (рис.5.7):

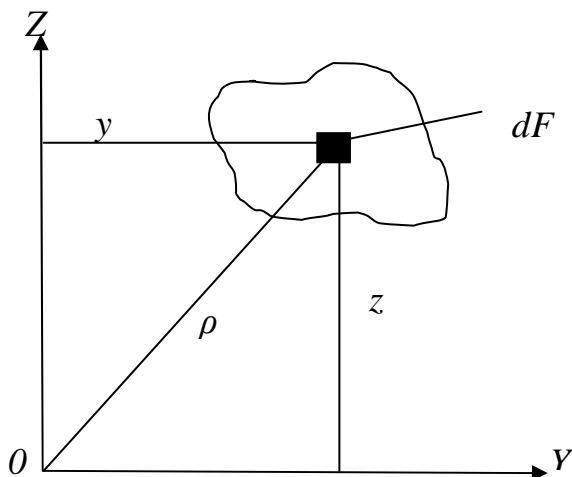


Рис. 5.7

$$I_P = \int_F \rho^2 dF. \quad (5.7)$$

Если полюс совпадает с началом

координат осей z и y , то $I_P = \int_F \rho^2 dF$

$$, \rho^2 = z^2 + y^2.$$

$$I_P = \int_F (z^2 + y^2) dF = I_y + I_z \quad (5.8)$$

Полярный момент всегда положительный. Размерность - см^4 .

Вычислим полярный момент круга (рис. 5.8).

Выделим элементарную площадь в виде кольца толщиной $d\rho$ (рис. 5.8).

Площадь такого элемента равна его длине $2\pi\rho$ умноженной на толщину $d\rho$.

$$dF = 2\pi\rho d\rho.$$

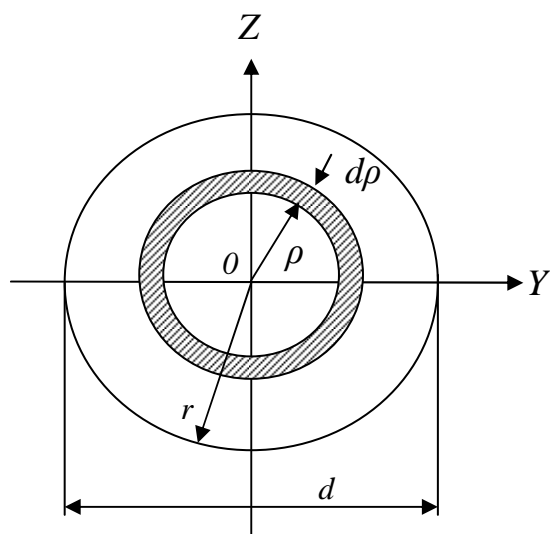


Рис. 5.8

Полярный момент инерции:

$$I_P = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \cdot \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{2\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$I_P = I_y + I_z; \quad \text{но для круга} \quad I_y = I_z.$$

$$I_P = 2I_y = \frac{2\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

5.4. Центробежный момент инерции

Центробежным моментом инерции называется интеграл $I_{zy} = \int_F zy dF$,

равный сумме произведений элементарных площадей на расстояние их координатных осей z и y .

В зависимости от выбора координатных осей центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Размерность - м^4 .

Моменты инерции сложных сечений

При проверке прочности частей конструкции приходится встречаться с сечениями довольно сложной формы, для которых нельзя выделить момент инерции таким путем, как для треугольника, круга. Тогда такое сечение разбивают на простейшие, момент инерции которых известен: $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$,

$$W_z = \frac{I_y}{z_{\max}}.$$

Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции ее составных частей.

Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей, из которых одна – центральная (рис. 5.9).

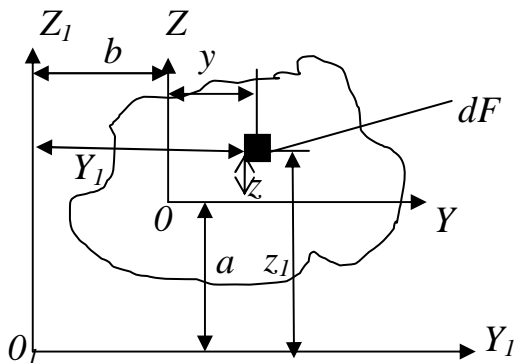


Рис. 5.9

Пусть известен момент инерции фигуры относительно центральных осей z и y . Требуется определить моменты инерции относительно осей параллельных центральным:

$$I_y = \int_F z^2 dF; \quad I_z = \int_F y^2 dF; \quad I_{y_1} = \int_F z_1^2 dF;$$

$$I_{z_1} = \int_F y_1^2 dF;$$

$$\text{Из рис.5.9} \quad y_1 = y + b; \quad z_1 = z + a;$$

$$I_{y_1} = \int_F (z + a)^2 dF = \int_F (z^2 + 2az + a^2) dF = \int_F z^2 dF + \int_F 2az dF + \int_F a^2 dF,$$

$$\int_F 2az dF = 2a \int_F z dF = 0, \quad \text{так как статический момент относительно оси}$$

$$\text{проходящей через центр тяжести, равен нулю. } \int_F a^2 dF = a^2 \int_F dF = a^2 \cdot F.$$

Итак, по аналогии

$$\left. \begin{aligned} I_{y_1} &= I_y + a^2 F \\ I_{z_1} &= I_z + b^2 F \end{aligned} \right\}. \quad (5.9)$$

Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, проведенной параллельно данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

Из (5.8) следует, что центральный момент инерции является наименьшим среди моментов инерции относительно параллельных осей: $I_y = I_{y_1} - a^2 F$.

Найдем также центральный момент инерции $I_{z_1 y_1}$ относительно осей $z_1 y_1$ параллельных центральному $I_{y_1 z_1} = \int_F z_1 y_1 dF$:

$$I_{y_1 z_1} = \int_F (z + a)(y + b) dF = \int_F yz dF + b \int_F z dF + a \int_F y dF + ab \int_F dF = I_y + abF, \quad (5.10)$$

$$b \int_F z dF = 0, \quad a \int_F y dF = 0$$

Центробежный момент инерции относительно взаимно перпендикулярных осей, параллельных центральному, равен центробежному моменту инерции относительно этих центральных осей плюс произведение площади фигуры на координаты ее центра тяжести относительно новых осей.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется статическим моментом сечения относительно оси?
2. Что такое осевой, полярный и центробежный моменты инерции сечения?
3. В каких единицах выражается статический момент сечения?
4. Чему равен статический момент относительно центральной оси?
5. Как определяются координаты центра тяжести простого и сложного сечений?
6. В каких единицах выражаются моменты инерции сечения?
7. Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
8. Чему равен осевой момент инерции прямоугольника относительно центральной оси, параллельной одной из его сторон?
9. Чему равны осевые моменты инерции круга относительно центральных осей?

10. Чему равен полярный момент инерции круга относительно центра?
11. Если в плоскости сечения проведен ряд параллельных осей, относительно какой из них осевой момент инерции имеет наименьшее значение?
12. Изменяется ли сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей при повороте этих осей?
13. Что представляют собой главные и главные центральные моменты инерции.
14. Какие оси называются главными осями инерции?
15. Какие оси называются главными центральными осями инерции?'
16. Чему равен центробежный момент инерции относительно главных осей инерции?
17. В каких случаях без вычисления можно установить положение главных осей?
18. Могут ли осевые и полярные моменты инерции быть равными нулю?
19. Какие знаки могут иметь осевой и центробежный моменты инерции?

6. КРУЧЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Деформация кручения возникает при действии на брус пар сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к оси (оси подвижного состава, трансмиссионные валы, пружины и пр.)

Пусть на вал (рис.6.1) круглого поперечного сечения насажены два шкива *I* и *II*. Шкив *I* – ведущий, передает вращение валу от двигателя. Скручивающий момент, передающейся от *I* на вал $M_1 = T_1 R_1 - t_1 R_1 = (T_1 - t_1) R_1$, где R_1 - радиус шкива *I*; T_1 - натяжение ведущей ветви; t_1 - натяжение ведомой ветви.

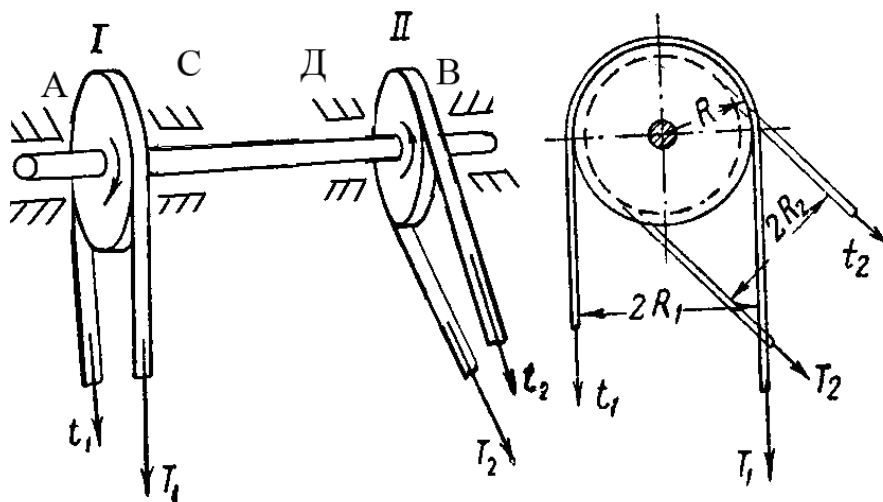


Рис. 6.1

Шкив *II* - ведомый- передает движение при помощи ремня, от него на вал передаётся момент M_2 , направленный противоположно M_1 : $M_2 = (T_2 - t_2) R_2$. При равномерном ходе машины все силы, действующие на вал, находятся в равновесии: $M_2 = M_1$; $(T_1 - t_1) R_1 = (T_2 - t_2) \cdot R_2$.

Таким образом, участок вала между центрами шкивов скручивается.

В случае, если на валу имеется несколько шкивов (один - ведущий, а остальные ведомые), необходимо построить эпюру крутящих моментов, т.е. график изменения крутящего момента по длине вала.

Крутящий момент - это внутренний момент, возникающий в сечении вала и равный сумме скручивающих (внешних) моментов, расположенных по одну

сторону от сечения. Знак крутящего момента будем считать по знаку внешних скручивающих моментов, расположенных слева от сечения, т.е. при взгляде слева вдоль оси вала момент, действующий по часовой стрелке, считаем положительным.

6.1. Определение напряжений при кручении круглого вала

Прежде чем приступить к определению напряжений обратимся к рассмотрению результатов опытов на кручение вала круглого сечения. Впервые эти опыты были проведены Кулоном. Им были введены следующие гипотезы (допущения):

- 1) ось вала после деформации остается прямой;
- 2) все поперечные сечения вала остаются плоскими и после деформации;
- 3) радиусы поперечных сечений при деформации остаются прямыми;
- 4) расстояния между сечениями не изменяются;
- 5) все образующие вала поворачиваются на один и тот же угол;
- 6) каждое поперечное сечение поворачивается относительно друг друга на некоторый угол, называемый углом закручивания.

Разрежем скручиваемый вал (рис. 6.2, 6.3) на две части сечением 1-1, перпендикулярным к оси вала, на расстоянии X от сечения закрепления, и рассмотрим равновесие одной из частей. Рассмотренная часть находится в равновесии под действием внешнего момента M_k и внутренних сил в сечении, создающих уравнивающий момент - эти силы перпендикулярны к радиусу, и напряжения τ , касательные к сечению и перпендикулярны к радиусам. (рис. 6.3). Крутящему моменту M_k противостоит момент касательных напряжений:

$$\sum M_{O_2O_1} = M_k - \sum M_\tau = 0, \quad M_k = \sum M_\tau, \quad (6.1)$$

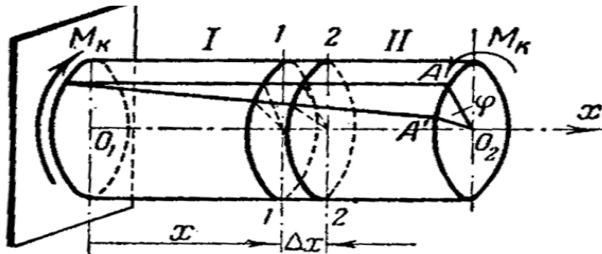
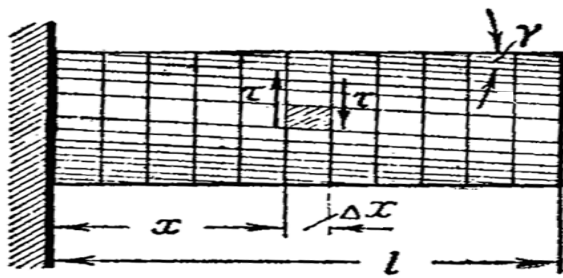


Рис. 6.2

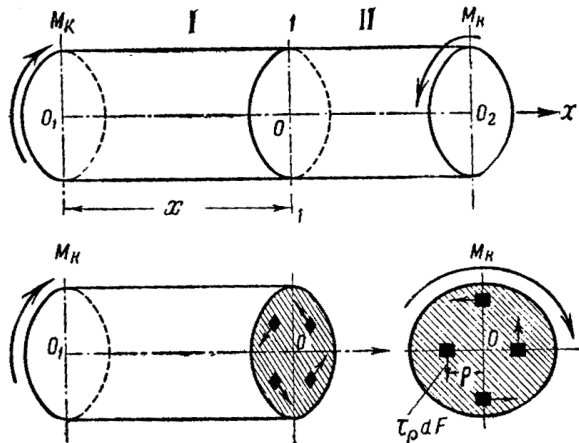


Рис. 6.3

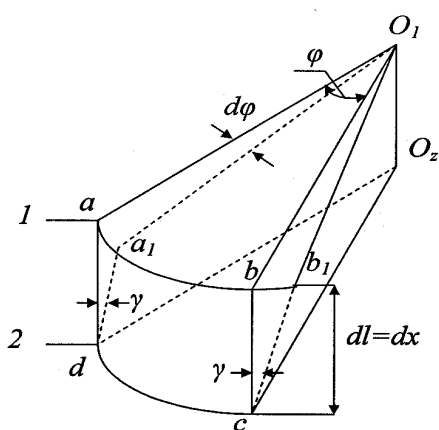


Рис. 6.4

$$dM_\tau = d\tau_\rho dF \cdot \rho, \quad (6.2)$$

где τ_ρ - касательное напряжения в рассматриваемой точке.

$$\sum M_\tau = \int_F \tau_\rho \cdot dF \cdot \rho \quad (6.3)$$

Используя уравнение равновесия, получим:

$$\int_F \tau_\rho \cdot \rho \cdot dF = M_k. \quad (6.4)$$

Однако найти величину τ не представляется возможным, так как неизвестен закон их распределения по сечению, т.е. задача статически неопределима. Рассмотрим деформацию элемента $abcdOO_1$, выделенного из вала сечениями 1-1 и 2-2. После деформации оба сечения повернутся на угол γ относительно закрепления (рис. 6.4).

На основании гипотез сечения останутся плоскими и грани элемента перекосятся ($a_1b_1cdO_1O_2$), так как его правая грань повернется на угол $d\varphi$ относительно левой. Перекос, вызванный неравномерным поворотом сечений 1-1 и 2-2 обращает прямые углы в тупые и острые, изменяя их

на величину γ , т.е. материал этого элемента испытывает деформацию сдвига.

Угол γ называется углом перекося, или относительным сдвигом, $\gamma = r \cdot \frac{d\varphi}{dl}$.

Деформация сдвига сопровождается возникновением касательных напряжений по граням перекашиваемого элемента, величина которых $\tau = G\gamma$.

Так как абсолютный сдвиг элемента на поверхности вала $\Delta S = bb_1 = \rho \cdot d\varphi$ и $\gamma = \frac{bb_1}{bc} = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dx}$, то

$$\tau_\rho = G\gamma = \rho G \frac{d\varphi}{dx}. \quad (6.5)$$

Напряжения в точке

$$\tau_\rho = \rho G \frac{d\varphi}{dx}. \quad (6.6)$$

Таким образом, относительный сдвиг и касательное напряжение в каждой точке поперечного сечения скручиваемого вала прямо пропорциональны расстоянию ρ этой точки от центра сечения; τ_{\max} - в точках на поверхности вала и обращается в нуль в центре (рис.6.5).

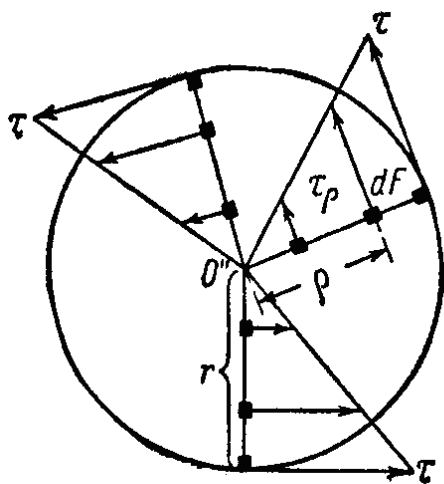


Рис. 6.5

Подставив (6.6) в (6.4), получим:

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF = M_k, \quad \text{но} \quad \int_F \rho^2 dF = I_p;$$

$$\text{тогда} \quad G \frac{d\varphi}{dx} I_p = M_k$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{GI_p}. \quad (6.7)$$

Это угол закручивания на единицу длины вала (относительный угол

закручивания). Подставив (6.7) в (6.6), получаем $\tau_\rho = \frac{M_k}{I_\rho} \cdot \rho$.

$$\text{При } \rho = \rho_{\max} = r \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_k \cdot r}{I_\rho} = \frac{M_k}{\frac{I_\rho}{r}} = \frac{M_k}{W_\rho}.$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_\rho}. \quad (6.8)$$

Отношение $W_\rho = \frac{I_\rho}{r}$ называется моментом сопротивления при кручении

Из формулы видно, что в точках сечения, близких к центру, τ невелик. M_{kr} уравнивается главным образом напряжениями, действующими в части сечения, близкой к поверхности вала, материал в средней части вала принимает очень слабое участие в этой работе. Поэтому с целью облегчения валов иногда их делают пустотелыми, удаляя наиболее загрязненную посторонними примесями центральную часть поковки, из которой изготавливают вал.

Условие прочности при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_\rho} \leq [\tau]. \quad (6.9)$$

При выбранном τ и известном M_k можно определить необходимый момент сопротивления и, следовательно, подобрать диаметр вала $[\tau] = (0,5 \div 0,6)[\sigma]$.

6.2. Определение деформаций при кручении

Деформация заключается в повороте сечения относительно неподвижного опорного сечения (рис. 6.4). Из формулы (6.7) имеем

$$d\varphi = \frac{M_k}{GI_\rho} dx.$$

$$\varphi(x) = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot I_p} dx = \frac{M_k \cdot x}{G \cdot I_p}. \quad (6.10)$$

При $X = l$ наибольший угол закручивания будет между крайними сечениями:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p}. \quad (6.11)$$

Угол закручивания прямо пропорционален крутящему моменту M_k , длине вала l и обратно пропорционален жесткости при кручении $G \cdot I_p$.

Если отдельные участки вала скручиваются различными моментами, то необходимо вычислить угол закручивания для каждого участка. Полный угол закручивания будет равен алгебраической сумме углов закручивания для всех участков.

Проверку жесткости вала проводят по условию

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p} \leq [\varphi], \quad (6.12)$$

где $[\varphi]$ - допустимый угол закручивания (в радианах);

Для обычных условий работы - $[\varphi] = 0,0053$;

для переменных нагрузок - $[\varphi] = 0,0044$;

для внезапно меняющихся нагрузок - $[\varphi] = 0,0026$.

Порядок проектировочного расчета вала:

1. Для заданной схемы вала и действующих на него скручивающих (внешних) моментов строят эпюру M_{kp} по отдельным участкам вала;
2. Выбирают материал для рассчитываемого вала и $[\tau]$;
3. Из условия прочности и жесткости определяют диаметр вала, принимают большее значение и округляют его до ближайшего стандартного.

Пример. На стальном валу постоянного сечения вращающемуся с частотой $n = 196 \text{ 1/с}$, насажено четыре шкива (рис. 6.6, а). Шкив 2 получает

от двигателя мощность (ведущий) $D_2 = D_1 + D_3 + D_4 = 75 \text{ кВт}$. Остальные три шкива передают рабочим машинам мощности $D_1 = 20 \text{ кВт}$, $D_3 = 30 \text{ кВт}$, $D_4 = 25 \text{ кВт}$.

Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) определить из расчетов на прочность и жесткость требуемый диаметр d вала при $[\tau] = 40 \text{ МПа}$, $[\varphi] = 0,5 \text{ град/м}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$;
- 3) построить эпюру углов поворота сечений вала.

Решение.

1. Определяем скручивающие (внешние) моменты, передаваемые шкивами:

$$T_{l_1} = 9550 \cdot P_1 / n = 9550 \cdot 20 / 196 = 970 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_{l_2} = 9550 \cdot P_2 / n = 9550 \cdot 75 / 196 = 3650 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_{l_3} = 9550 \cdot P_3 / n = 9550 \cdot 30 / 196 = 1460 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_{l_4} = 9550 \cdot P_4 / n = 9550 \cdot 25 / 196 = 1220 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

Моменты T_{l_1} , T_{l_2} , T_{l_3} , T_{l_4} показаны на рис. 6.6, б. Момент T_{e_2} направлен в сторону вращения вала, следовательно, моменты T_{e_1} , T_{e_3} , T_{e_4} - в противоположную сторону.

2. Строим эпюры крутящих моментов. Крутящий момент в произвольном сечении вала численно равен сумме внешних моментов, приложенных слева или справа от сечения. Знак крутящего момента можно определить по внешним моментам: крутящий момент в данном сечении считается положительным, когда внешний момент вращает отсеченную часть против часовой стрелки, если смотреть на отсеченную часть со стороны сечения. Если же внешний момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке (при взгляде со стороны сечения), то крутящий момент в сечении считается отрицательным.

В соответствии с этим крутящие моменты на участках вала равны:

$$T_1 = 0; \quad T_2 = -T_{l_1} = -970 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad T_3 = -T_{l_1} + T_{l_2} = -970 + 3650 = 2680 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_4 = -T_{l_4} = 1220 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad T_5 = 0.$$

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 6.6, в).

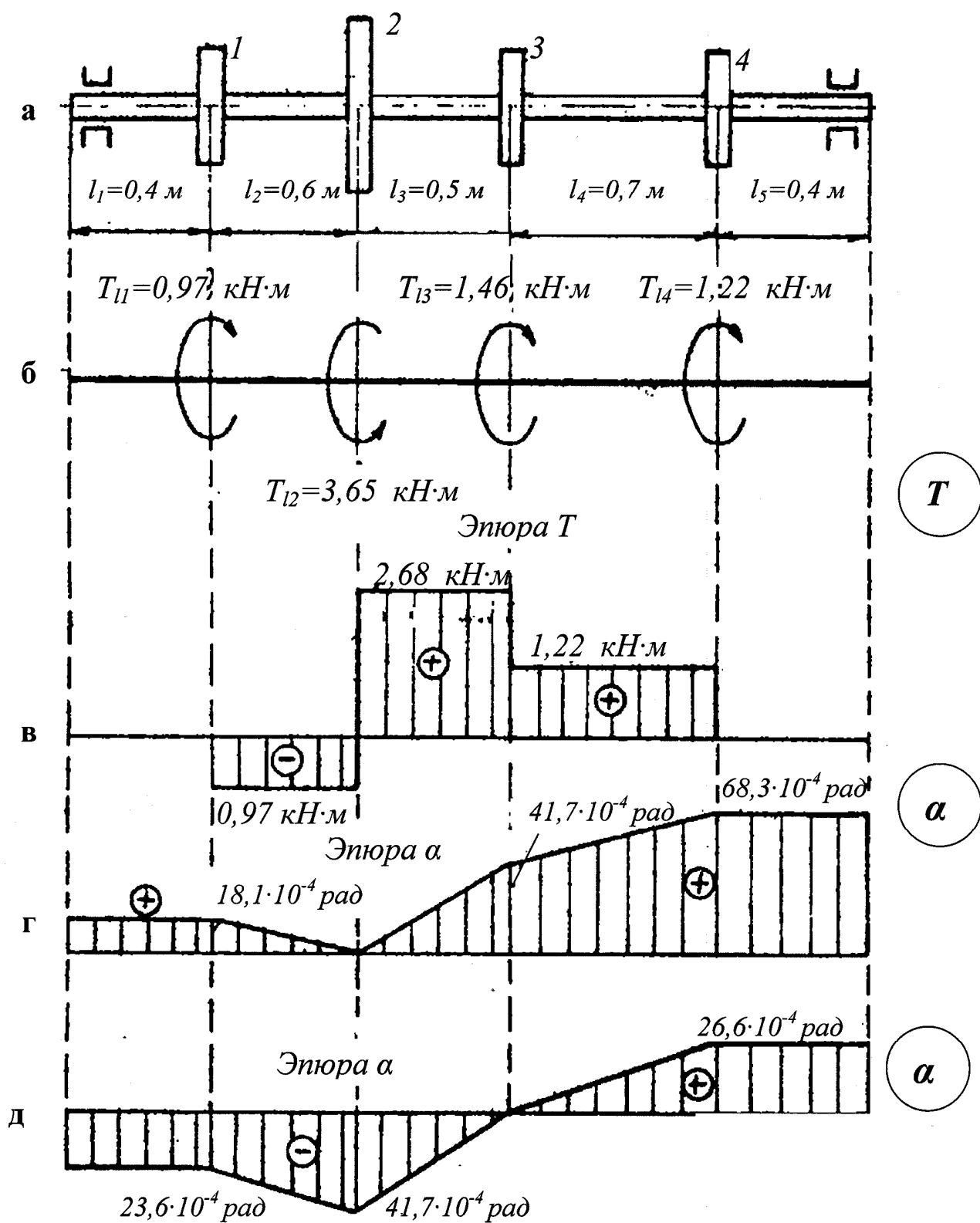


Рис. 6.6

3. Определяем диаметр вала из условия жесткости. Вычислим полярный момент сопротивления вала, требуемый по условию прочности:

$$W_P = \frac{|T_{\max}|}{[\tau]} = \frac{2680 \cdot 10^3}{40} = 67 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Диаметр вала находим из выражения для полярного момента сопротивления:

$$W_P = \frac{\pi \cdot d^3}{16},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_P}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 67 \cdot 10^3}{3,14}} \approx 70 \text{ мм}.$$

4. Определим диаметр вала из условия жесткости.

Так как сечение вала постоянно по всей его длине, то наибольший относительный угол закручивания вала будет на участке l_3 , в сечениях которого возникает наибольший крутящий момент». На этом участке относительный угол закручивания $\varphi_{\max} = \varphi_3 = T_3 / (G \cdot I_P)$.

Угол φ_{\max} по условию жесткости не должен превышать φ , т.е. $\varphi_{\max} \leq \varphi$.

Принимая $\varphi_{\max} = \varphi$, находим $\varphi_{\max} = \varphi_3 = T_3 / (G \cdot I_P) = 32 \cdot T_3 / (\pi \cdot G \cdot d^4) = [\varphi]$, где $I_P = \pi \cdot d^4 / 32$ - полярный момент инерции сечения вала.

Переведем $[\varphi] = 0,5$ град/м в радианы на миллиметр:

$$[\varphi] = 0,5 \cdot \pi \cdot 10^{-3} / 180 = \pi \cdot 10^{-3} / 360 = 8,73 \cdot 10^{-6} \text{ рад/мм}.$$

$$\text{Тогда } d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot T_3}{\pi \cdot G \cdot [\varphi]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2680 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 8,73 \cdot 10^{-6}}} \approx 79 \text{ мм}$$

По условию жесткости требуется больший диаметр, чем по условию прочности. Поэтому окончательно принимаем $d = 80 \text{ мм}$, округлив расчетное значение до ближайшего большего по стандартному ряду диаметров.

5. Для построения эпюры углов поворота α определяем полные углы закручивания вала на отдельных участках:

$$\varphi_1 = \frac{T_1 \cdot l_1}{G \cdot J_P} = 0; \quad J_P = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 80^4}{32} \approx 4 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$$

$$\varphi_2 = \frac{T_2 \cdot l_2}{G \cdot J_P} = \frac{-970 \cdot 10^3 \cdot 0,6 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = -18,1 \cdot 10^{-4} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{T_3 \cdot l_3}{G \cdot J_p} = \frac{2680 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 41,7 \cdot 10^{-4} \text{ рад} ;$$

$$\varphi_4 = \frac{T_4 \cdot l_4}{G \cdot J_p} = \frac{1220 \cdot 10^3 \cdot 0,7 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 26,6 \cdot 10^{-4} \text{ рад} ;$$

$$\varphi_5 = \frac{T_5 \cdot l_5}{G \cdot J_p} = 0.$$

По значениям полных углов закручивания φ_i , вычисленным для каждого i -го участка скручиваемого вала, можно найти угол α поворота произвольного поперечного сечения вала по отношению к неподвижному (или к сечению, условно принятому за неподвижное). При этом следует иметь в виду, что полный угол закручивания на каком-либо участке вала равен разности углов $\alpha_{\text{пра}}^{\text{дд}}$ и $\alpha_{\text{ле}}^{\text{дд}}$ поворота правого и левого концов этого участка, т.е. $\varphi = \alpha_{\text{пра}}^{\text{дд}} - \alpha_{\text{ле}}^{\text{дд}}$.

Следовательно, $\alpha_{\text{пра}} = \alpha_{\text{ле}} - \varphi$; $\alpha_{\text{ле}} = \alpha_{\text{пра}} - \varphi$.

Угол α положителен, если при взгляде вдоль оси бруса со стороны левого .его конца на правый поворот происходит против часовой стрелки, а при взгляде со стороны правого конца на левый - по часовой стрелке.

Таким образом, на основании вышесказанного имеем:

$$\alpha_2 = 0 ;$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 - \varphi_2 = 18,1 \cdot 10^{-4} \text{ рад} ;$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \varphi_3 = 41,7 \cdot 10^{-4} \text{ рад} ;$$

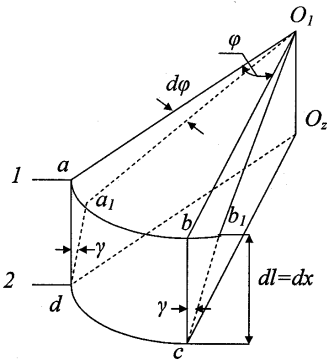
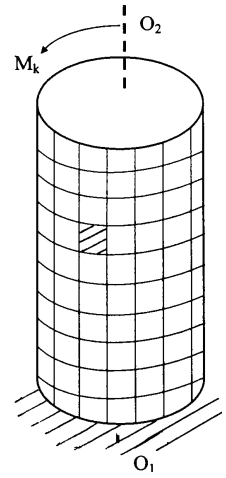
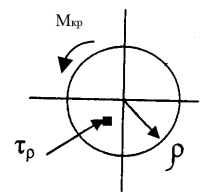
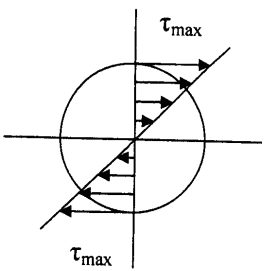
$$\alpha_4 = \alpha_3 + \varphi_4 = 41,7 \cdot 10^{-4} + 26,6 \cdot 10^{-4} = 68,3 \cdot 10^{-4} \text{ рад} ;$$

По этим данным на рис.6.6, г построена эпюра углов поворота сечений вала.

Если за неподвижное было условно принято сечение вала, на котором расположен шкив 3, то эпюра α углов поворота имела бы вид, изображенный на рис. 6.6, д.

Результаты п. 6 показаны в табл. 6-1.

Таблица 6.1.

	Деформации	Напряжения	Закон Гука	Условия прочности	Условия жесткости
КРУЧЕНИЕ	$\gamma = \frac{d\varphi}{dl} \cdot r$ - угол сдвига  	$\tau = \frac{M_{kp}}{J_p} \cdot \rho$ $J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4$ - полярный момент инерции круга $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3$ - полярный момент сопротивления круга  	$\tau = \gamma \cdot G$ $\Delta\varphi = \frac{M_{kp} \cdot l}{G \cdot J_p}$ γ - угол сдвига G - модуль сдвига	$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$ Определение d : $d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{kp}}{\pi \cdot [\tau]}} = 1,7 \sqrt[3]{\frac{M_{kp}}{[\tau]}}$	$\Delta\varphi_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot l}{G \cdot J_p} \leq [\varphi]$ $G \cdot J_p$ - жесткость поперечного сечения при кручении $\frac{G \cdot J_p}{l}$ - жесткость стержня при кручении Определение d $d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\max} \cdot l \cdot 180}{\pi \cdot G \cdot [\varphi]}}$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое абсолютный и относительный сдвиг?
2. Напишите выражение закона Гука при сдвиге.
3. Какая зависимость между модулем упругости E и модулем сдвига G ?
4. При каком нагружении прямой брус испытывает деформацию кручения?
5. Как вычисляют скручивающий момент, передаваемый шкивом, по заданной мощности и числу оборотов в минуту?
6. Какое правило знаков принято для крутящих моментов?
7. Что называется полным и относительным углом закручивания?
8. Перечислите предпосылки теории кручения вала круглого поперечного сечения.
9. Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала при кручении? Как они направлены?
10. Формула для определения напряжений в поперечном сечении скручиваемого круглого стержня?
11. Формулы для определения относительного и полного угла закручивания?
12. Что такое жесткость сечения при кручении?
13. Что называется полярным моментом сопротивления? В каких единицах он выражается и чему равен?
14. Как рассчитывают скручиваемый вал на прочность и жесткость?
15. Остаются ли плоскими при кручении поперечные сечения некруглых стержней?

7. ИЗГИБ

7.1. Понятие о балках и опорных закреплениях

Деформация изгиба возникает под действием приложенных к стержню сил или пар сил, расположенных в плоскости, которая проходит через его продольную ось.

Изгибом называется деформация, сопровождающаяся изменением кривизны стержня.

При поперечном изгибе силы перпендикулярны к оси стержня.

Стержень, работающий на изгиб, называется балкой. В случае, когда приложенные силы лежат в плоскости, проходящей через продольную ось балки, и в ней располагается одна из главных осей инерции, возникает явление плоского изгиба. При плоском изгибе ось бруса искривляется в плоскости действующих сил и является плоской кривой.

На балку действуют приложенные силы и реакции опор. Внешние нагрузки:

- 1) сосредоточенные силы P (Н, кН);
- 2) пары сил M (Н·м, кН·м);
- 3) моменты и силы равномерно и неравномерно распределенные по длине балки

Интенсивность неравномерно распределенных нагрузок меняется по длине балки $q(x)$ и равна величине нагрузки, приходящейся на единицу длины балки в рассматриваемой точке.

Рассмотрим балки, удовлетворяющие следующим ограничениям:

- 1) сечение балки имеет хотя бы одну ось симметрии;
- 2) все внешние силы лежат в этой плоскости симметрии балки.

Для вычисления опорных реакций необходимо знать устройство опор балок:

а) шарнирно-неподвижная опора позволяет опорному сечению балки свободно поворачиваться вокруг шарнира, расположенного в центре тяжести опорного сечения, но не допускает поступательного перемещения этого конца (рис. 7.1, а), имеет две неизвестные реакции Y_A , X_A ;

б) шарнирно-подвижная опора допускает помимо поворота и свободное

перемещение в соответствующем направлении. Эта опора дает лишь одну неизвестную реакцию Y_A (рис. 7.1, б);

в) защемленный конец (жесткая заделка) дает три неизвестные реакции и препятствует всяким перемещениям этого конца в плоскости действия сил имеет три неизвестные реакции Y_A , X_A , M_{AP} (рис. 7.1, в).

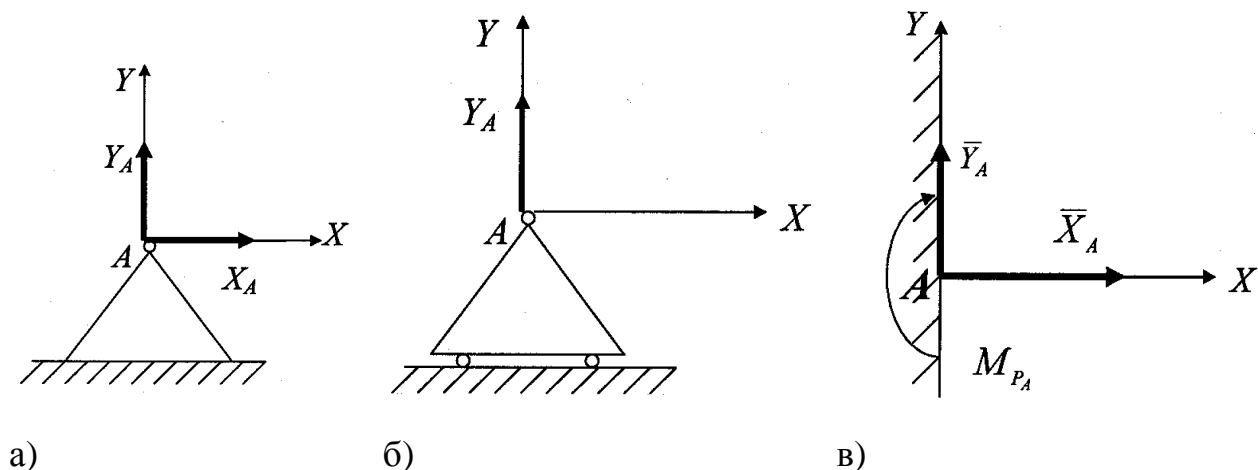


Рис. 7.1

Балка может опираться на ряд опор указанного типа и называться многопролетной.

Балку, заделанную одним концом в стенку при втором свободном, называют консольной балкой или консолью. Задача определения реакций опор из условий статики разрешима при наличии лишь трех неизвестных реакций.

7.2. Изгибающий момент и поперечная сила в сечении балки

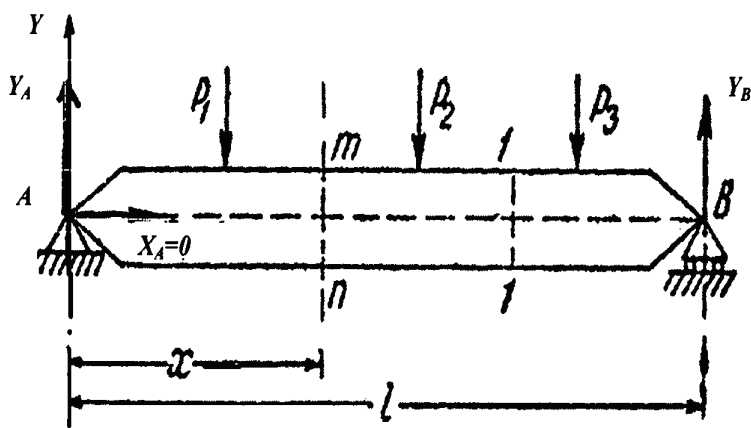
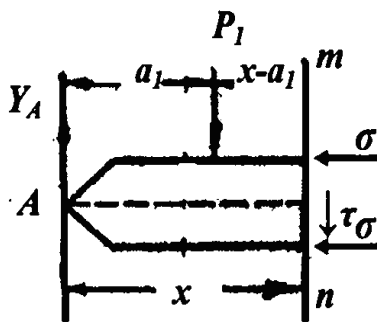


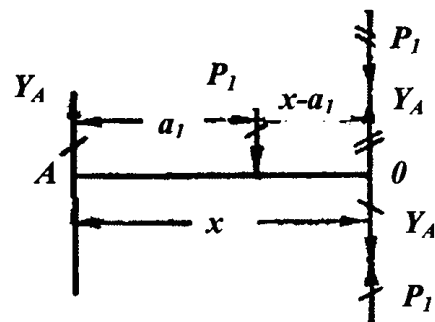
Рис. 7.2

При вычислении напряжений необходимо отыскать опасное сечение балки (рис. 7.2), через которое передаются наибольшие напряжения. Определим напряжения по сечениям, перпендикулярным к оси балки. Воспользуемся для этого методом сечений.

На оставленную левую часть балки в каждой точке сечения будут действовать напряжения, которые можно представить составляющими: нормальным σ и касательным τ (рис. 7.3, а). σ и τ уравнивают внешние силы Y_A и P_1 , приложенные к оставленной части. Внешние силы и напряжения вместе образуют систему сил в пространстве, для которой можно составить шесть уравнений равновесия.



а)



б)

Рис. 7.3

Чтобы получить для σ и τ общие формулы, годные при любом значении x , удобно систему сил заменить силой, приложенной в какой-либо точке - центре приведения, и парой сил (рис. 7.3, б). За центр приведения обычно берут центр тяжести рассматриваемого сечения, что значительно упрощает формулы для вычисления σ и τ . В частном случае сила может обратиться в нуль.

При сложении положительными будем считать направления для сил - вверх, для а моментов - по часовой стрелке: $Q_y = Y_A - P_1$, $M = Y_A \cdot x - P_1(x - a_1)$.

Таким образом, в любом сечении балки может быть два усилия: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M .

Изгибающий момент - это момент системы сил, заменяющих в данном сечении действие отброшенной части балки на её оставшуюся часть. Изгибающий момент M в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов относительно центра тяжести сечения всех сил, расположенных по одну сторону от сечения (слева или справа).

Сила Q_y , стремящаяся сдвинуть оставленную часть балки относительно отброшенной, называется поперечной (перерезывающей) силой в данном сечении. Поперечную силу Q_y можно также рассматривать как проекцию на плоскость сечения равнодействующей системы сил, заменяющих в данном сечении действие отброшенной части балки на её оставшуюся часть.

Поперечная сила Q_y в сечении балки численно равна алгебраической сумме всех сил, расположенных по одну сторону от сечения (слева или справа).

Независимо от выбора правой или левой части балки, условимся считать положительными: M - по часовой стрелке и Q_y вверх, если при вычислении рассматривается левая часть, балки и, обратно, M - против часовой стрелки и Q_y - вниз, если рассматривается правая часть (рис. 7.4 а, б).

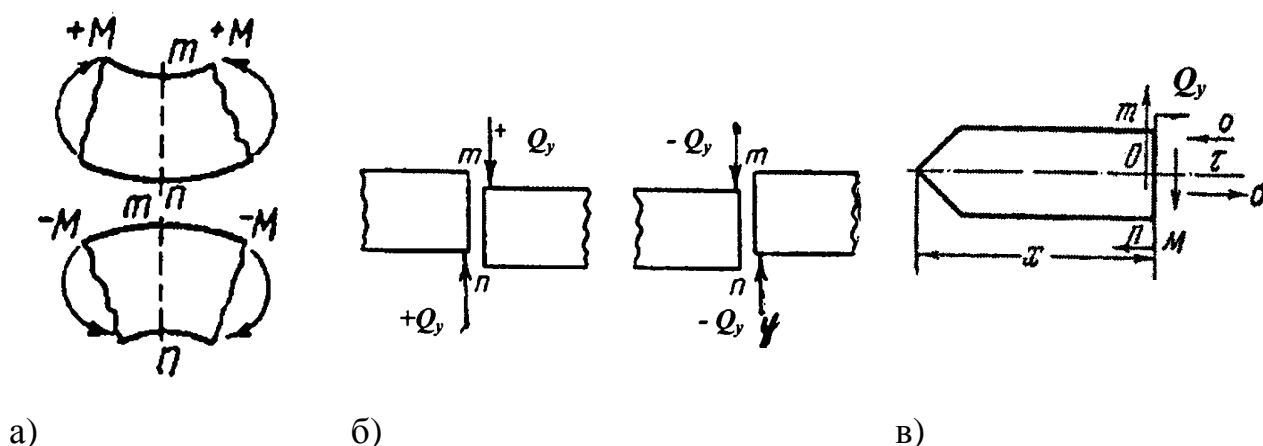


Рис. 7.4

Если изгибающий момент в сечении положителен, то балка в этом сечении гнется выпуклостью вниз, если отрицателен - выпуклостью вверх.

В сечении, где M переходят через нуль, кривизна балки меняет своё направление, т.е. ось балки в этом сечении имеет точку перегиба.

Или, поперечная сила Q_y в сечении положительна, если её векторы стремятся вращать части рассеченной балки по часовой стрелке; изгибающий момент положителен - если он вызывает в нижних волокнах балки растяжение, т.е. если внешняя сила стремится повернуть балку относительно центра тяжести

сечения по часовой стрелке, то она дает в выражении для Q_y в этом сечении положительное слагаемое; если внешняя нагрузка создает относительно центра тяжести рассматриваемого сечения момент, вызывающий растяжение в нижних волокнах балки, то она дает в выражении для изгибающего момента M в этом сечении положительное слагаемое.

Нормальные напряжения σ складываются в пару, уравнивающую изгибающий момент M , так как направлены параллельно плоскости симметрии балки, в которой лежит M , т.е. $\sigma = f_1(M)$. Поперечная сила уравнивается только касательными напряжениями τ , т.е. $\tau = f_2(Q_y)$ (рис. 7.4, в).

7.3. Дифференциальные зависимости между интенсивностью сплошной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом

Рассмотрим балку (рис. 7.5 а) с произвольной нагрузкой. Распределенную нагрузку условимся считать положительной, если она действует вверх (такая нагрузка дает положительную составляющую для изгибающего момента).

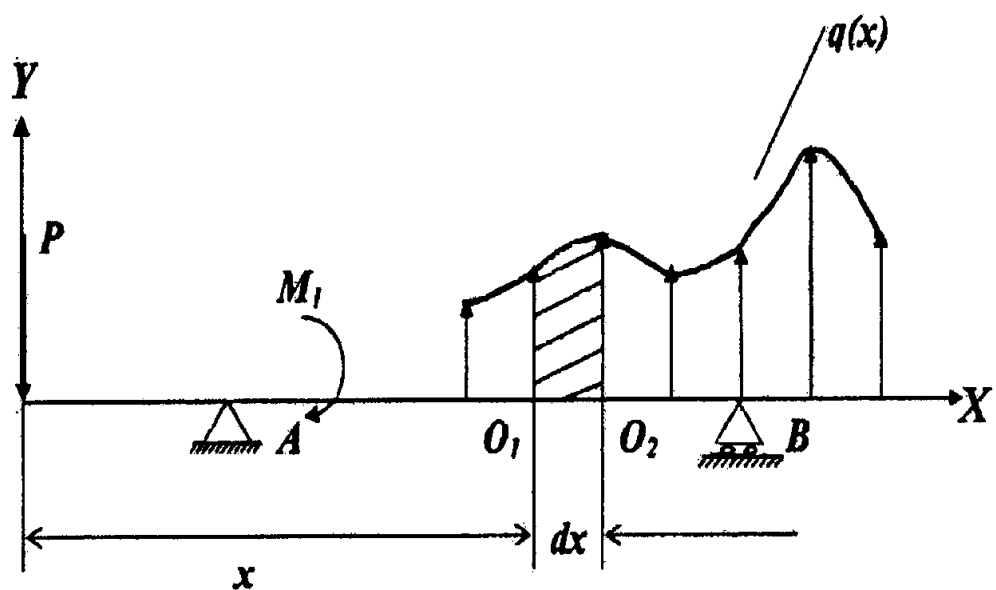
Выделим на участке, где нет сосредоточенных сил и моментов, малый элемент балки O_1O_2 (рис. 7.5, а), который находится в равновесии под действием внешней нагрузки и Q_y и M в сечениях O_1 и O_2 (рис. 7.5, б).

Поскольку в общем случае Q_y и M меняются вдоль оси балки, то в сечении O_1 имеем M и Q_y (рис. 7.5, б), а в сечении O_2 : $Q + dQ$; $M + dM$.

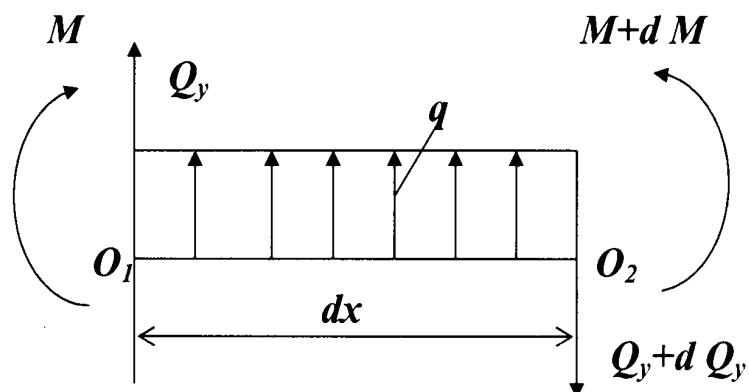
Условия равновесия выделенного элемента:

$$\sum y = 0 \quad Q_y + qdx - (Q_y + dQ_y) = 0. \quad (7.1)$$

$$\sum M_{O_2} = 0 \quad M + Q_y dx + qdx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0. \quad (7.2)$$



а)



б)

Рис. 7.5

Получаем из 7.1 $qdx - dQ = 0$:

$$q = \frac{dQ_y}{dx}. \quad (7.3)$$

Производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности сплошной нагрузки в том же сечении.

Пренебрегая бесконечно малыми второго порядка малости, из (7.2) имеем $Q_y dx - dM = 0$:

$$\frac{dM}{dx} = Q_y. \quad (7.4)$$

Таким образом производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе в том же сечении:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ_y}{dx} = q. \quad (7.5)$$

Таким образом вторая производная от изгибающего момента по абсциссе равна интенсивности сплошной нагрузки.

Если q направлено вниз, то $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$.

Графически Q_y в данном сечении может рассматриваться как тангенс угла наклона касательной к эпюре M в точке, соответствующей этому сечению.

Если ее ось направлена справа налево, то $\frac{dM}{dx} = -Q_y$ так как угол наклона касательной меняет знак при изменении направления оси абсцисс.

Из (7.4) следует, что M достигнет экстремального значения там, где $Q_y = \frac{dM}{dx} = 0$, т.е. в сечении, где поперечная сила переходит через нуль.

Полученные в п. 7.3 зависимости, необходимые при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, показаны в табл. 7.1.

7.4. Чистый изгиб. Определение нормальных напряжений при изгибе

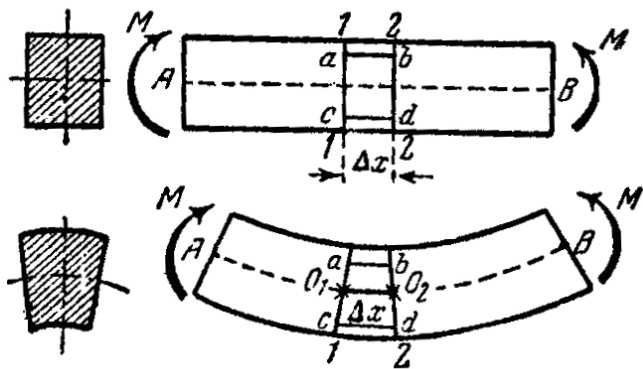


Рис. 7.6

При определении нормальных напряжений необходимо рассмотреть такой случай нагружения, при котором в сечении балки будет действовать только одни изгибающие моменты, а Q_y отсутствовать (рис. 7.6). Данный вид деформации называется чистым изгибом. Экспериментальные исследования балки, подверженной чистоту изгибу, позволили сделать выводы:

- 1) проведенные до деформации по боковым поверхностям балки две

параллельные прямые линии 1-1, 2-2, близко отстоящие друг от друга и перпендикулярные к продольной оси, после нагружения ее остаются прямыми линиями, но повернутыми по отношению друг к другу на некоторый угол;

2) волокно ab укорачивается, а cd - удлиняется. Между этими волокнами лежат волокна, удлинения которых равны нулю, что указывает на отсутствие в них напряжений. Такой слой балки называется нейтральным. Поперечное сечение пересекается нейтральным слоем по прямой - нейтральной осью или нулевой линией;

3) площадь сечения балки в сжатой зоне увеличивается, а в растянутой - уменьшается, волокна в направлении ширины балки испытывают обычное растяжение (сжатие), связанное с продольной деформацией. На основании данных исследований можно сделать следующие допущения:

- а) плоское поперечное сечение балки при чистом изгибе остается плоским до и после деформации (гипотеза плоских сечений) и поворачиваются относительно их нейтральных осей;
- б) продольные волокна друг на друга не давят, т.е. под действием нормальных напряжений они находятся в линейном напряженном состоянии;
- в) деформации волокон по ширине сечений элемента одинаковы, а это дает основание считать, что и нормальные напряжены по ширине балки также постоянны.

При решении данной задачи необходимо еще ввести следующие ограничения:

- 1) балка должна иметь хотя бы одну ось симметрии, лежащую в плоскости действия приложенных сил;
- 2) материал балки подчиняется закону Гука и модуль упругости при растяжении или сжатии одинаков;
- 3) размеры балки должны быть такими, при которых возникает только плоский изгиб без скручивания и коробления;

Таблица 7.1 - Характерные особенности построения эпюр Q_y и $M_{изг.}$

$\begin{cases} q = \frac{d}{dx}(Q_y) = \frac{d^2}{dx^2}(M_{изг.}) \\ Q_y = \frac{d}{dx}(M_{изг.}) \end{cases}$		Дифференциальные зависимости между q , Q_y и $M_{изг.}$
Зависимость Q_y и $M_{изг.}$ от q		
1	$q = 0$	Q_y - прямая \parallel оси Z $M_{изг.}$ - наклонная прямая
2	$q \neq 0$	Q_y - наклонная прямая $M_{изг.}$ - квадратичная парабола
Зависимость $M_{изг.}$ от Q_y		
1	$Q_y > 0$	$M_{изг.}$ возрастает
2	$Q_y < 0$	$M_{изг.}$ убывает
3	$Q_y = 0$	$M_{изг.}$ экстремум (max или min)
4	Q_y проходит через «0» и непрерывна	$M_{изг.}$ имеет экстремум
Зависимость Q_y и $M_{изг.}$ от Приложенной сосредоточенной силы P		Q_y - скачок на величину силы P ; $M_{изг.}$ - излом (резкое изменение смежных участков).
Зависимость Q_y и $M_{изг.}$ от приложенной сосредоточенной пары M		Q_y - не отражается; $M_{изг.}$ - скачок, равный величине приложенной сосредоточенной пары M .
Q_y и $M_{изг.}$ на свободном конце или шарнирно-опертая балка		$Q_y = P$ - внешняя сосредоточенная сила; $M_{изг.} = 0$ если не приложен сосред. момент; $M_{изг.} = M$, если приложен сосред. момент M .
Q_y и $M_{изг.}$ в жёсткой заделке		Q_y - численно равен опорной реакции Y_A ; $M_{изг.}$ - численно равен моменту в заделке M_p

Изгиб, при котором ось балки после деформации остается в плоскости действия внешних сил, называется плоским изгибом. Воспользуемся методом сечений.

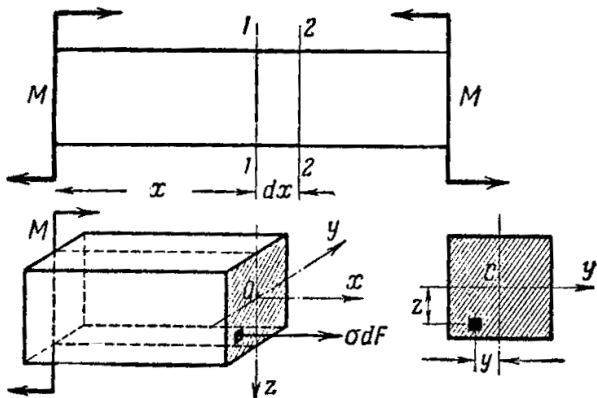


Рис. 7.7

Рассмотрим равновесие левой части балки (рис. 7.7) (для простоты балка взята прямоугольного сечения), ось X направлена вдоль нейтрального слоя. На элементарную площадку действует сила $dN = \sigma \cdot dF$. Отсеченная часть балки, находится в равновесии под действием внешних сил, образующих пару M и нормальных усилий dN , заменяющих отброшенную часть балки.

Так как проекция пары M на любую ось равна нулю, то

$$\sum x = 0 \quad \int_F \sigma \cdot dF = 0 \quad (7.6)$$

$\sum y = 0$, $\sum z = 0$ обращаются в тождества вида $0=0$, так как dN проектируется на эти оси в точку.

Пара M лежит в плоскости XOZ и моментов относительно осей Z и X не дает. $\sum M_x = 0$ обращается в тождество так как dN параллельно оси X :

$$\sum M_y = 0 \quad M - \int_F \sigma \cdot dF \cdot z = 0 \quad \int_F \sigma \cdot dF \cdot z = M \quad (7.7)$$

$$\sum M_z = 0 \quad \int_F \sigma \cdot dF \cdot y = 0 \quad (7.8)$$

Таким образом из шести уравнений статики можно использовать только

$$\text{три: } \sum x = 0; \quad \int_F \sigma \cdot dF = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \int_F \sigma \cdot dF \cdot z = M; \quad \sum M_z = 0;$$

$$\int_F \sigma \cdot dF \cdot y = 0.$$

Этих уравнений недостаточно для определения σ , поскольку неизвестен закон их распределения в зависимости от расстояния z площади dF до нейтральной оси. Неизвестно также положение нейтральной оси.

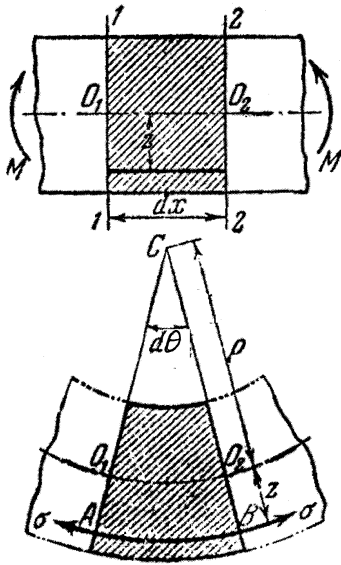


Рис. 7.8

Рассмотрим деформацию элемента dx (рис.7.8.) Линия $O_1O_2 = dx$, так как она принадлежит нейтральному слою. Волокна, лежащие выше нейтрального слоя, укорачиваются, а ниже - удлиняются. Найдем удлинения волокна AB , расположенного на расстоянии z от нейтрального слоя.

Первоначальная длина волокна

$$AB \quad dx = \cup O_1O_2 = \rho \cdot d\theta$$

$$\cup AB = (\rho + z) \cdot d\theta \quad - \text{ после деформации}$$

$$\Delta l = (\rho + z) \cdot d\theta - \rho \cdot d\theta = z \cdot d\theta \quad - \text{ абсолютное удлинение волокна } AB.$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{dx} = \frac{z \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta} = \frac{z}{\rho}, \quad (7.9)$$

т.е. удлинение волокна пропорционально его расстоянию до нейтральной оси.

Здесь ρ - радиус кривизны нейтрального слоя, который можно считать для бесконечно малого по длине элемента $\rho = const$. Допустим, что при изгибе волокна друг на друга не давят и что каждое волокно испытывает простое (линейное) растяжение или сжатие. Применяя закон Гука, получим:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = E \cdot \frac{z}{\rho}. \quad (7.10)$$

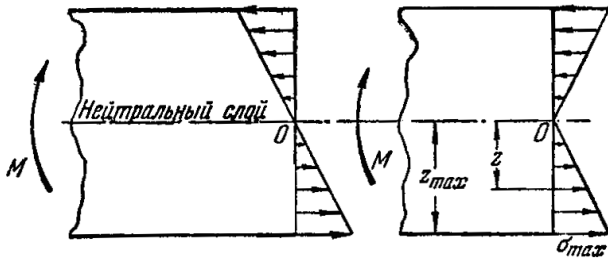


Рис. 7.9

Таким образом, величина нормальных напряжений при изгибе меняется пропорционально расстоянию z рассматриваемой точки сечения от нейтрального слоя. Напряжения σ распределены по высоте сечения по линейному закону (рис. 7.9).

Уравнение (7.10) дает только характер распределения σ по сечению, но им нельзя воспользоваться для вычисления, так как ни z , ни ρ неизвестны, поскольку неизвестно расположение нейтрального слоя по высоте сечения.

Подставив (7.10) в (7.6), получим $\sum x = 0$; $\int_F \frac{E}{\rho} \cdot z \cdot dF = 0$, так как

$$\frac{E}{\rho} = \text{const} \neq 0, \text{ то}$$

$$\int_F z \cdot dF = 0. \quad (7.11)$$

Таким образом, статический момент площади сечения относительно оси Y равен нулю и следовательно, нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения, точка пересечения осей OZ и OX является центром тяжести сечения

Подставив (7.10) в (7.8), получим:

$$\sum M_z = 0; \int_F \frac{E}{\rho} \cdot z \cdot y \cdot dF = 0, \rightarrow \frac{E}{\rho} \int_F z \cdot y \cdot dF = 0, \text{ т.е. } \int_F z \cdot y \cdot dF = 0.$$

Центробежный момент инерции равен нулю, следовательно, сечение симметрично относительно оси Z , так как оси Z и Y , проходящие через центр тяжести, будут главными, поэтому уравнение (7.8) обращается в тождество.

Подставив (7.10) в (7.7), получим: $\sum M_y = 0$; $\int_F \frac{E}{\rho} \cdot z^2 \cdot dF = M$, или

$$\frac{E}{\rho} \int_F z^2 \cdot dF = M \quad . \quad \text{Здесь} \quad I_y = \int_F z^2 \cdot dF \quad - \quad \text{момент инерции площади}$$

поперечного сечения балки относительно нейтральной оси. Тогда

$$\frac{E \cdot I_y}{\rho} = M \quad \text{или} \quad \frac{E}{\rho} = \frac{M}{I}. \quad (7.12)$$

Подставив (7.12) в (7.10), получим:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E}{\rho} \cdot z = \frac{M}{I} \cdot z. \quad (7.13)$$

Таким образом, нормальные напряжения в любой точке сечения прямо пропорциональны величине изгибающего момента и расстоянию точки от нейтральной оси и обратно пропорциональны моменту инерции сечения относительно нейтральной оси.

Момент инерции сечения зависит от формы и размеров сечения.

Физический смысл I можно уяснить из (7.12): $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}$.

Чем больше I при данном M , тем большим окажется радиус кривизны нейтрального слоя, т.е. тем меньше балка искривится.

Величина I характеризует способность балки сопротивляться в зависимости от размеров и формы поперечного сечения балки. E характеризует то же, но со стороны материала балки, $E \cdot I$ - жесткость балки при изгибе.

С искривлением оси балки связан взаимный поворот сечения.

Так как $dx = \rho \cdot d\theta$, то

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} = \frac{M \cdot dx}{E \cdot I}. \quad (7.14)$$

Таким образом, поворот сечений $d\theta$, как и кривизна балки $\frac{1}{\rho}$, прямо пропорциональны величине изгибающего момента и обратно пропорциональны жесткости балки.

7.5. Условия прочности. Подбор сечений балок

Формула (7.13) получена для случая, если $Q_y = 0$. Однако если $Q_y \neq 0$, сечения не только поворачиваются, но и несколько искривляются под влиянием касательных напряжений. Однако это искривление для двух смежных сечений таково, что оно не меняет установленного выше закона распределений деформации волокон, заключающихся между этими сечениями. Поэтому формула (7.13) применима и для случая, когда $Q_y \neq 0$. Формула (7.13) автоматически дает знак напряжения: при $M +$, $z < 0$ верхние волокна сжаты ($-\sigma$); $M +$, $z > 0$ нижние волокна растянуты ($+\sigma$).

При проверке прочности балки необходимо найти наиболее напряженные и на растяжение и на сжатие площадки. Для этого надо применить формулу (7.13) к опасному сечению, т.е. подставить в нее вместо M его наибольшее значение M_{\max} , а вместо z подставить z_{\max} (расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных от нее точек):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} z_{\max}}{I} = \frac{M_{\max}}{\left(\frac{I}{z_{\max}} \right)} = \frac{M_{\max}}{W}, \quad (7.15)$$

где $W = \frac{I}{z_{\max}}$ называется осевым моментом сопротивления сечения.

Для симметричного сечения относительно оси нейтральной существует одно вполне определенное значение W . Если сечение несимметрично относительно нейтральной оси - имеем два момента сопротивления W_1 и W_2 .

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma] \quad (7.16)$$

Величина W характеризует влияние формы и размеров принятого сечения на прочность балки при напряжениях, не превосходящих предела пропорциональности.

При проектировании балок могут быть такие случаи расчета:

- 1) заданы действующие нагрузки и размеры балок, требуется проверить прочность балки;
- 2) заданы пролет балки, ее материал и действующие на нее нагрузки, требуется определить поперечные размеры балки,
- 3) заданы размеры балки и ее материал, требуется определить несущую способность балки.

При этом следует учитывать:

- 1) в случае материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию $[\sigma_{\delta}] = [\sigma_{\text{н\acute{a}}}] = [\sigma]$, при несимметричном сечении необходимо из двух значений W_1 и W_2 принимать меньшее, относящееся к наиболее отдаленному волокну;
- 2) когда материал балки различно сопротивляется растяжению и сжатию имеем два условия прочности:

$$\sigma_p = \frac{M_{\max}}{W_1} \leq [\sigma +] \quad \text{для растянутых волокон,}$$

$$\sigma_{\text{н\acute{a}}} = -\frac{M_{\max}}{W_2} \leq [\sigma -] \quad \text{для сжатых волокон.}$$

В зависимости от того, чему лучше сопротивляется материал, что больше $[\sigma +]$ и $[\sigma -]$, приходится соответствующим образом конструировать сечение, выбирая его форму и размеры так, чтобы W_1 и W_2 удовлетворяли условию прочности.

7.6. О рациональной форме сечения

Сечение считается рациональным, если оно обеспечивает прочность данной балки при минимальном ее весе. В большинстве случаев потеря прочности связана с величиной σ . Как показывает эпюра σ (рис. 7.9), материал, расположенный вблизи нулевой линии, работает мало (σ здесь малы), следовательно, только очень малая часть изгибающего момента приходится на эту часть сечения, большую же часть M принимает материал, расположенный вдали от нулевой линии. Чем большая часть площади сечения вынесена от нулевой линии на периферию, тем рациональнее будет сечение. Наилучшим из широко распространенных профилей является двутавр - в нем наиболее реализована идея удаления материала от нулевой линии. Однако он рационален, если его ориентировать так, чтобы нулевая линия совпала с осью, относительно которой момент инерции минимален.

Для хрупкого материала рациональным будет такое сечение, у которого σ_{\max} в растянутой зоне значительно меньше σ_{\max} в сжатой зоне, так как для них $[\sigma +]$ значительно меньше $[\sigma -]$. Для хрупкого материала выбирают такую форму сечения, чтобы нулевая линия была сдвинута в сторону растянутой зоны (например, тавр). Так как M и Q_y неодинаковы во всех сечениях, то рациональной формой балки в целом является балка переменного сечения.

7.7. Касательные напряжения при изгибе

Касательные напряжения при изгибе уравнивают поперечную силу Q_y . Поэтому при чистом изгибе ($M \neq 0$, $Q_y = 0$) касательные напряжения $\tau = 0$.

При прямом поперечном изгибе ($M \neq 0$, $Q_y \neq 0$) возникают как нормальные, так и касательные напряжения.

Касательные напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки определяют по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S(x)}{I_x \cdot b}, \quad (7.17)$$

где Q_y - поперечная сила в сечении балки;

$S(x)$ - статический момент относительно нейтральной оси части поперечного сечения, лежащей выше рассматриваемого слоя волокон, то есть часть сечения, заштрихованная на рис. 7.10;

I_x - осевой момент инерции сечения балки;

b - ширина рассматриваемого продольного слоя.

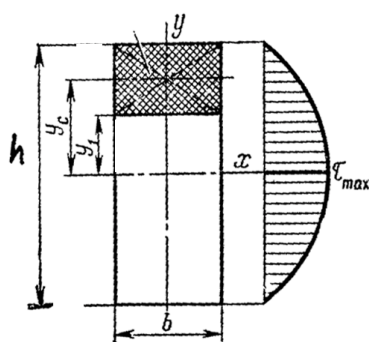


Рис. 7.10

Касательное напряжение пропорционально величине поперечной силы, статическому моменту рассматриваемой части сечения и обратно пропорционально ширине балки и моменту инерции ее сечения относительно нейтральной оси. Распределение напряжения τ для прямоугольного сечения балки показаны на рис. 7.10.

Величина τ для балки прямоугольного поперечного сечения меняется по высоте сечения по закону параболы и при $y = \frac{h}{2}$, $\tau = 0$; при $y = 0$, $\tau = \tau_{\max}$.

Условие прочности при изгибе балки по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S}{b \cdot I} \leq [\tau_u], \quad (7.18)$$

где $[\tau_u]$ - допускаемое касательное напряжение при изгибе.

Таким образом, в балке прямоугольного поперечного сечения максимальные касательные напряжения возникают в тех точках, где нормальные напряжения равны нулю (на нейтральной оси) и наоборот: в крайних точках сечения, где нормальные напряжения максимальны, касательные напряжения равны нулю.

Это справедливо также для балок круглого поперечного сечения.

7.8. Проверка прочности по главным напряжениям

Пользуясь результатами п.3.1, запишем расчетные условия по всем теориям прочности:

первая теория - наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma_I \leq [\sigma] \quad \sigma_I = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \leq [\sigma], \quad (7.19)$$

вторая теория - наибольших относительных удлинений:

$$\begin{aligned} \sigma_{II} &= [\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3)\mu] \leq [\sigma] \\ \sigma_{II} &= \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) - \mu \cdot \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \end{aligned}$$

При $\mu = 0,3$ $\sigma_{II} = \frac{1}{2} [0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leq [\sigma];$ (7.20)

третья теория - наибольших касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{III} &= [\sigma], \\ \sigma_{III} &= [\sigma_1 - \sigma_3] = \frac{1}{2} \left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \\ \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} &\leq [\sigma]; \end{aligned} \quad (7.21)$$

четвертая теория - наибольшей потенциальной энергии изменения формы:

$$\begin{aligned} \sigma_{IV} &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \\ \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} &\leq [\sigma]. \end{aligned} \quad (7.22)$$

При поперечной изгибе ее материал находится в неоднородном напряженном состоянии. Опасной точкой (где материал находится в наиболее напряженном состоянии) может быть одна из следующих точек:

1) первая точка, где $\sigma = \sigma_{\max}$ - наиболее удаленная от нейтральной линии точка опасного сечения, где $M = M_{\max}$, условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma], \quad (7.23)$$

2) вторая точка, где $\sigma = 0$ и $\tau = \tau_{\max}$ - точка нулевой линии того сечения, где $Q = Q_{\max}$, условие прочности имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}}{b \cdot I} \leq [\tau], \quad (7.24)$$

3) третья точка, где σ и τ , хотя и не принимают наибольших значений, но в своей комбинации создают наиболее невыгодное напряженное состояние, условие прочности выражено формулами (7.19 - 7.22). Длительная практика применения и расчёта балок показала, что в большинстве реальных случаев условие прочности, по которому проверяется прочность и подбираются сечения балок, имеет вид $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$.

7.9. Деформация балок. Аналитический способ определения деформаций

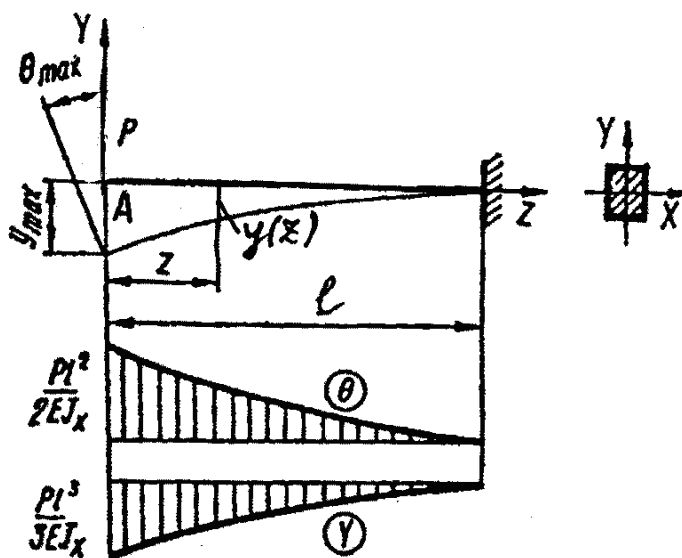


Рис. 7.11

Под действием поперечной нагрузки балка деформируется (рис. 7.11) и ее ось принимает форму кривой, называемой упругой линией. При плоском изгибе искривление оси происходит в плоскости действующих сил. Деформации балок выражаются двумя величинами:

- 1) углами поворота сечений θ ;
- 2) прогибами $Y(Z)$.

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки, называется прогибом балки в этом сечении или прогибом этого сечения Y_z . Угол θ , на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению,

называется углом поворота сечения.

Значения деформаций балки необходимы при расчете её на жесткость и при решении статически неопределимых задач. Допускаемые прогибы в зависимости от назначения конструкции колеблются в пределах $\frac{1}{1000} \div \frac{1}{250}$ пролета.

При расположении начала координат в одной из точек первоначальной оси балки, которую примем за ось Z , и направление оси Y вверх от первоначального положения уравнение изогнутой оси балки будет иметь вид

$$y = f(z). \quad (7.25)$$

Касательная к изогнутой оси в точке составит с осью Z угол, равный углу поворота сечения θ относительно своего первоначального положения. С другой стороны, тангенс угла, образованного касательной к кривой $y = f(z)$ с осью Z равен

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dz}. \quad (7.26)$$

Так как на практике угол поворота в балках не превышает 1° , то можно считать, что

$$\theta = \frac{dy}{dz}, \quad (7.27)$$

т.е. угол поворота сечения равен первой производной по Z от прогиба в этом сечении.

Следовательно, задача изучения деформации балки сводится к получению (зависимости) уравнения изогнутой оси $y = f(z)$. Для получения этого уравнения воспользуемся выражением для кривизны балки, испытывающей чистый изгиб:

$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{M(z)}{E \cdot I}. \quad (7.28)$$

Пренебрегая незначительным влиянием $\theta(z)$ на величину деформации, будем считать справедливым (7.28) и при поперечном изгибе.

Из математического анализа известно уравнение кривизны плоской кривой:

$$\frac{1}{\rho(z)} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{d^2 y}{dz^2}\right)^2\right]^{3/2}}} . \quad (7.29)$$

Подставив (7.29) в (7.28), получим дифференциальное уравнение упругой линии.

$$\pm \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{d^2 y}{dz^2}\right)^2\right]^{3/2}}} = \frac{M(z)}{E \cdot I} . \quad (7.30)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, интегрирование которого представляет значительные трудности.

Величина $\frac{dy}{dz}$ для большинства практических задач ничтожно мала, ею можно пренебречь. Тогда приближенное дифференциальное уравнение упругой линии будет

$$\pm \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M(z)}{E \cdot I_x} . \quad (7.31)$$

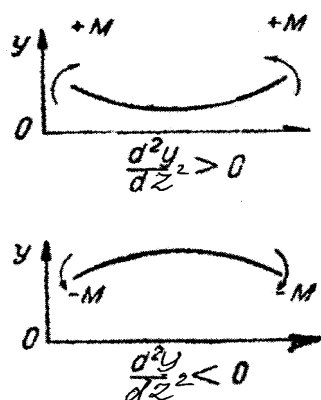


Рис. 7.12

Так как знак второй производной (знак кривизны) зависит от направления координатных осей, то при независимом от направления осей знаке $M(z)$ в уравнении (7.31) будем ставить знак плюс при направлении y вверх и знак минус при направлении вниз (рис.7.12). В дальнейшем условимся ось Y направлять всегда вверх и в дифференциальном

уравнении $E \cdot I \frac{d^2 y}{dz^2} = M(z)$ знак изгибающего момента ставить по прежним правилам.

Кривизна положительна, если в сторону положительной оси y направлена вогнутость кривой и отрицательна, если выпуклость кривой.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение изогнутой оси, получим уравнение углов поворота $EI \frac{dy}{dz} = E \cdot I_x \cdot \theta = \int_0^l M(z) dz + c_1$:

$$\theta(z) = \frac{1}{EI_x} \cdot \int_0^l M(z) dz + c_1, \quad (7.32)$$

где c_1 - постоянная интегрирования.

Для балки, показанной на рис. 7.11, уравнение углов поворота имеет вид

$$\theta(z) = -\frac{Pz^2}{2EI_x} + c_1.$$

Постоянную интегрирования c_1 определяем из условий при $z=l$, $\theta=0$.

$c_1 = \frac{Pl^2}{2EI_x}$. Тогда угол поворота $\theta(z) = -\frac{Pz^2}{2EI_x} + \frac{Pl^2}{2EI_x}$ при $0 \leq z \leq l$.

По этому уравнению строим эпюру углов поворота. Наибольшее значение угла поворота в точке A , при $z=0$, $\theta_{\max} = -\frac{Pl^2}{2EI_x}$. Интегрируя второй раз уравнение (7.31), получаем уравнение прогибов:

$$y = \frac{1}{EI} \left[\int_0^l dz \int_0^l M(z) \cdot dz + c_1 z + c_2 \right]. \quad (7.33)$$

Постоянную интегрирования c_2 определяем из граничных условий при

$$z=l, y(z)=0. C_2 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI_x}.$$

Уравнение прогибов запишем так: $y(z) = -\frac{Pz^2}{6 \cdot EI_x} + \frac{Pl^2 \cdot z}{2EI} - \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI_x}$.

По этому уравнению строим эпюру прогибов. Y_{\max} будет в точке А при

$$z=0: Y_{\max} = -\frac{Pl^3}{3 \cdot E \cdot I_x}.$$

Условие жесткости для балок, испытывающих поперечный изгиб:

$$\theta_{\max} \leq [\theta], \quad y_{\max} \leq [y], \quad (7.34)$$

где $[\theta]$ и $[y]$ - допускаемый угол прогиба и допускаемый прогиб.

Основные результаты п.7 показаны в табл. 7.2.

Пример. Для деревянной балки круглого поперечного сечения (рис. 7.13, а) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, установить опасное сечение и найти диаметр балки. Допускаемое напряжение $[\sigma]=10$ МПа.

Решение.

1. Определяем реакции опоры (заделки А). В общем случае в заделке конца балки могут возникнуть три реакции силы: Z_A , R_A и M_{Ap} , их направления покажем произвольно. Составим три уравнения равновесия статики:

$$\sum Z = 0 \quad Z_A = 0 \quad \sum Y = 0 \quad -qa + P + R_A = 0,$$

$$\sum M_A = 0 \quad -M_{Ap} - M_l - P \cdot b + qa \left(\frac{a}{2} + b \right) = 0$$

и находим искомые силы:

$$Z_A = 0; \quad R_A = qa - P = 20 \cdot 1 - 25 = -5 \text{ кН},$$

$$M_{Ap} = -M_l - P \cdot b + g \cdot a \left(\frac{a}{2} + b \right) = -8 - 25 \cdot 1 + 20 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Знаки "минус" указывают на то, что направления сил R_A и M_{Ap} нами

первоначально не угаданы и их необходимо поменять на противоположные (рис. 7.13, б).

2. Строим эпюры Q_y и M , применяя метод сечений. На участке a проводим любое сечение 1-1. Отбрасываем правую часть, а левую – длиной z_a изобразим отдельно (рис. 7.13, в). Действие отброшенной части балки на оставленную заменим Q_y и $M_{\text{в сеч. 1-1}}$; для этой расчетной схемы (см. рис. 7.13, в) составим выражение поперечной силы как сумму проекций всех сил, действующих на рассматриваемую часть балки. При этом распределенная нагрузка заменяется равнодействующей qz_a , приложенной посередине длины z_a , так как $q = \text{const}$. Сила qz_a вращает рассматриваемую часть балки относительно проведенного сечения 1-1 против часовой стрелки, поэтому берется со знаком "минус": $Q_y(z_a) = -qz_a$, ($0 \leq z_a \leq a$).

Полученное уравнение для поперечной силы в любом сечении участка a является уравнением первой степени относительно переменной z_a . Если передвигать это сечение, т.е. менять z_a , то Q_y на участке a будет меняться по линейному закону. Полученное выражение $Q_y(z_a)$ будет пригодным до тех пор, пока сечение 1-1 не перейдут на точку B , т.е. пока $0 \leq z_a \leq a$. Так как $Q_y(z_a)$ представляет собой уравнение прямой линии, то достаточно вычислить лишь два крайних значения Q_y при $z_a = 0$ и при $z_a = a$:

$$Q_y(z_a = 0) = 0; \quad Q_y(z_a = a) = -qa = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кН}.$$

При построении эпюр Q_y и $M_{\text{в сеч. 1-1}}$ условимся откладывать положительные значения ординат вверх (в положительную сторону оси y), а отрицательные – вниз. Следовательно, от базовой линии (оси абсцисс, проведенной параллельно оси балки) значение поперечной силы -20 кН откладываем вниз под точкой B балки. Соединив ее с нулем (под точкой C), имеем эпюру Q_y на участке a . (см. рис. 7.13, д).

Для построения эпюры на участке b проведем сечение 2-2 длиной $0 \leq z_b \leq b$. Оставим правую часть балки (рис. 7.13, г) далее поступаем аналогично предыдущему: $Q_y(z_b) = R_A = 5 \text{ кН}$.

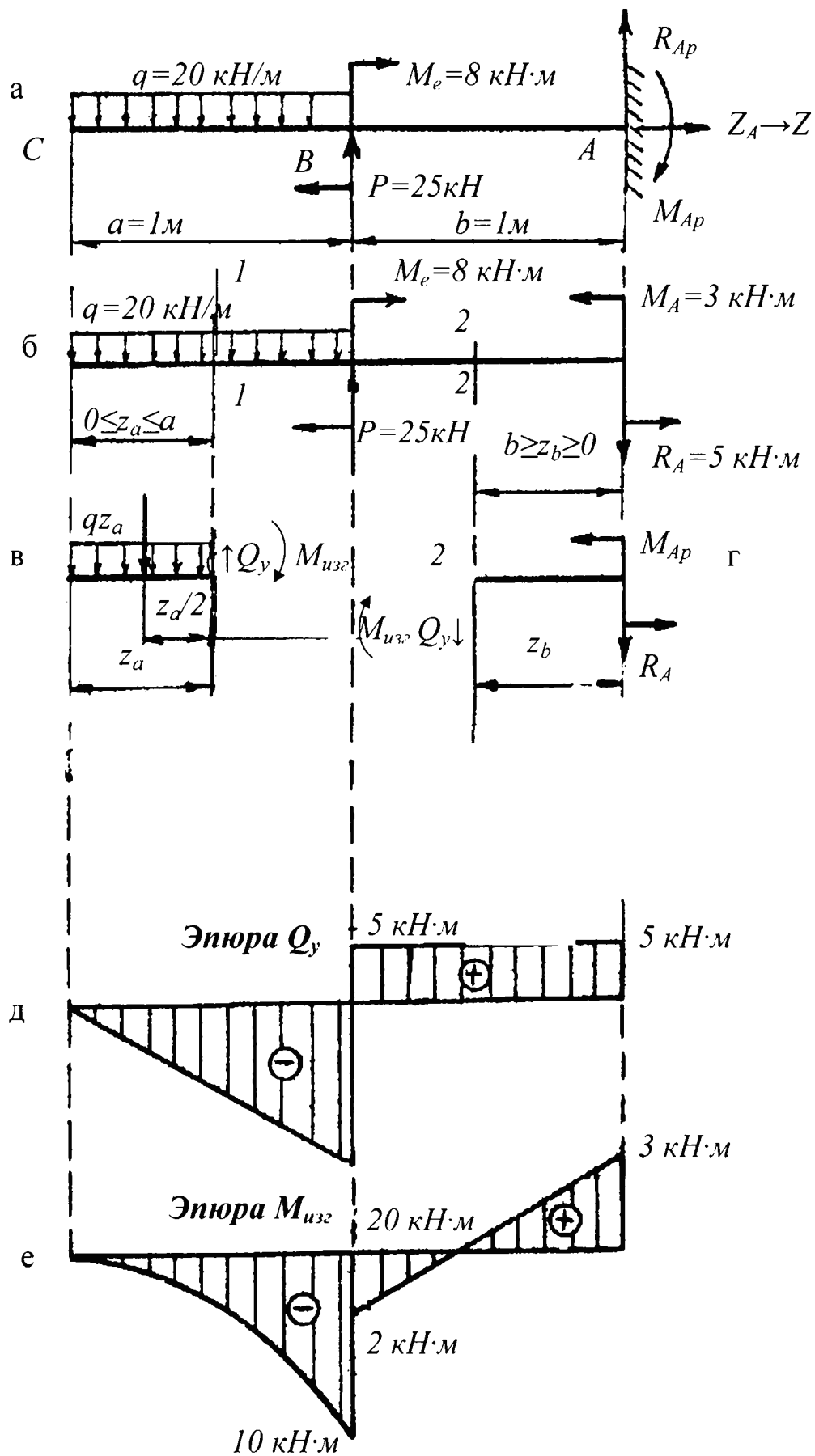


Рис. 7.13

Здесь R_A взято со знаком "плюс", так как рассматриваемую часть балки сила R_A вращает по часовой стрелке.

Нетрудно видеть, что поперечная сила во всех сечениях участка $0 \leq z_b < b$ будет одинаковой, поэтому на эпюре здесь будет прямая, параллельная оси абсцисс.

Для построения эпюры изгибающих моментов для тех же расчетных схем оставленных частей балки (см. рис. 7.13, г), записываем общие выражения как сумму моментов относительно проведенных сечений всех сил, действующих на рассматриваемую часть балки:

$$\text{для сечения 1-1: } M(z_a) = -qz_a \cdot \frac{z_a}{2} = -\frac{qz_a^2}{2}, \quad 0 \leq z_a \leq a;$$

$$\text{для сечения 2-2: } M(z_a) = M_{A_p} - R_A z_b, \quad 0 \leq z_b \leq b.$$

В первом уравнении (для участка a) переменная z_a в квадрате. Следовательно, эпюра M на участке a должна быть представлена кривой (параболой); для ее построения необходимо вычислить несколько значений моментов. Но для практических целей достаточно иметь три точки, а в некоторых случаях и две, если помнить, что $Q_y = \frac{dM}{dz}$. Например, в нашем случае в точке C $Q_y = 0$, т.е. производная от $M(z_a)$ равна нулю. А это означает, что на эпюре $M_{\text{эп}}(z_a)$ должен быть экстремум, т.е. в этой точке кривой касательная должна быть параллельной оси абсцисс.

Находим значения момента в точках C и B :

$$M(z_a = 0) = 0; \quad M(z_a = a) = -\frac{qa^2}{2} = -\frac{20 \cdot 1^2}{2} = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Откладываем под точкой C нуль, а под B $M(z_a = a) = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, соединяем их кривой так, чтобы в точке эпюры M под сечением C балки касательная была бы параллельна оси Z . Это можно сделать только так, как показано на рис. 7.13, е.

Уравнение $M(z_b)$ линейное, поэтому находим значения моментов на концах участка b и, соединив их прямой, получаем эпюру M на этом участке:

$$M(z_b = 0) = M_{A_p} = 3 \text{ кН} \cdot \text{м} ; \quad M(z_b = b) = M_{A_p} - R_A \cdot b = 3 - 5 \cdot 1 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Необходимо проверить эпюры Q_y и $M_{\xi\zeta\bar{a}}$ по скачкам, по табл. 7.1. На эпюре Q должны быть скачки только под сосредоточенными силами, действующими на балку (в том числе и под реактивными силами). Скачки эти должны быть на величину действующих в этих точках балки сил. В нашем случае в сечении B имеет место сила $P = 25 \text{ кН}$. На эпюре Q_y под точкой B балки мы имеем скачок на 25 кН . В сечении A - сила в $R_A = 5 \text{ кН}$. На эпюре Q_y здесь скачок на 5 кН . На эпюре M должны быть скачки под сосредоточенными моментами, приложенными к балке. В нашей задаче моменты M в точке B и M_{A_p} в сечении A . И на эпюре $M_{\xi\zeta\bar{a}}$ в этих же местах имеем скачки на величину указанных моментов.

Во многих случаях такая простая проверка является определяющей правильность построенных эпюр.

3. Подбираем сечение балки по условию прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma],$$

где $W = \frac{\pi d^3}{32}$ - момент сопротивления изгибу круглого сечения;

$M_{\max} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ - максимальный изгибающий момент (из эпюры $M_{\xi\zeta\bar{a}}$).

$$\text{Тогда } \sigma_{\max} = \frac{32 \cdot M_{\max}}{(\pi d^3)} \leq [\sigma], \text{ откуда } d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\max}}{(\pi [\sigma])}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10 \cdot 10^6}{(\pi \cdot 10)}} = 216,8 \text{ мм}.$$

Округляя в большую сторону, принимаем $d = 220 \text{ мм}$.

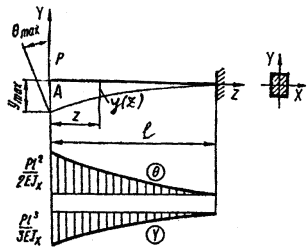
Вопросы для самоконтроля

1. Что такое прямой изгиб?
2. Что такое чистый и поперечный изгибы?
3. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях бруса в общем случае действия на него плоской системы сил?
4. Какие правила знаков приняты для каждого из внутренних усилий?
5. Как вычисляют изгибающий момент в поперечном сечении балки?
6. Как вычисляют поперечную силу в поперечном сечении балки?

7. Какие типы опор применяют для крепления балок к основанию?
8. Какие уравнения используют для определения значений опорных реакций?
9. Как проверить правильность определения реакций опор?
10. Какая дифференциальная зависимость существует между поперечной силой и изгибающим моментом?
11. Как формулируется теорема Журавского?
12. В чем заключается проверка эпюр Q_y и $M_{\xi\zeta}$.
13. Как определяют экстремальное значение изгибающего момента?
14. Что представляют собой нейтральный слой и нейтральная ось? Как они расположены?
15. Чему равна кривизна оси балки при чистом изгибе?
16. По какой формуле определяются нормальные напряжения в поперечном сечении балки при чистом изгибе? Как они изменяются по высоте балки?
17. Что такое жесткость сечения при изгибе?
18. Что такое момент сопротивления при изгибе? Как он определяется? Какова его размерность?
19. Напишите зависимости для всех видов расчета: проверочного, проектного и для определения допускаемой нагрузки.
20. Какие перемещения получают, поперечные сечения балок при прямом изгибе?
21. Какая дифференциальная зависимость существует между прогибами и углами поворота сечений балки.

Таблица 7.2.

	Деформации	Напряжения	Закон Гука	Условия прочности	Условия жесткости
ИЗГИБ	<p>Чистый изгиб</p> $Q_y = 0$ $M \neq 0$ $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$	<p>Круглое сечение</p> $J_X = J_Y$ $\sigma = \frac{M \cdot y}{J_X}$ $J_X = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$\sigma = \varepsilon \cdot E$ $\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}$ $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dz^2}$	$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X} \leq [\sigma]$ $W_X = \frac{J_X}{y_{\max}}$	$y_{\max} < [y]$ $\theta_{\max} < [\theta]$
	<p>Плоский поперечный изгиб</p> $Q_y \neq 0$ $M \neq 0$	<p>Касательные напряжения=0</p> <p>Прямоугольное сечение</p> $\tau = \frac{Q_Y \cdot S_X}{J_X \cdot b}$ <p>Формула Журавского</p> $\frac{d^2 y}{dz^2} EJ_X = M(z) = -P \cdot Z$ $\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{P \cdot Z}{EJ_X}$ <p>EJ_X - жест. попереч. сечения при изгибе</p>	$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M(Z)}{E \cdot J_X}$	$W_X = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ - для круга $W_X = \frac{b \cdot h^2}{6}$ - для прямоугольника $\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_X}{J_X \cdot b} \leq [\tau]$	



8. СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

Валы в большинстве случаев кроме кручения испытывают и изгиб, который вызывается собственным весом вала, весом шкивов, маховиков, зубчатых колес, усилиями натяжения ремней, окружными усилиями на зубьях шестерен и т.д.

При решении задач по расчету валов в первую очередь нужно выяснить расчетные значения величин крутящих $M_{кр}$ и изгибающих $M_{изг}$ моментов, действующих в сечениях вала. Покажем это на примере прямого вала круглого сечения со шкивом (рис. 8.1). Вес шкива D . Натяжения ремней \dot{O} и t заменяем силой $T + t$, приложенной в центре шкива, и парой $(T - t) \cdot \frac{D}{2}$

Силы $T + t$ и P производят изгиб вала, $(T - t) \cdot \frac{D}{2}$, скручивая вал, уравниваются моментом $M_{кр}$.

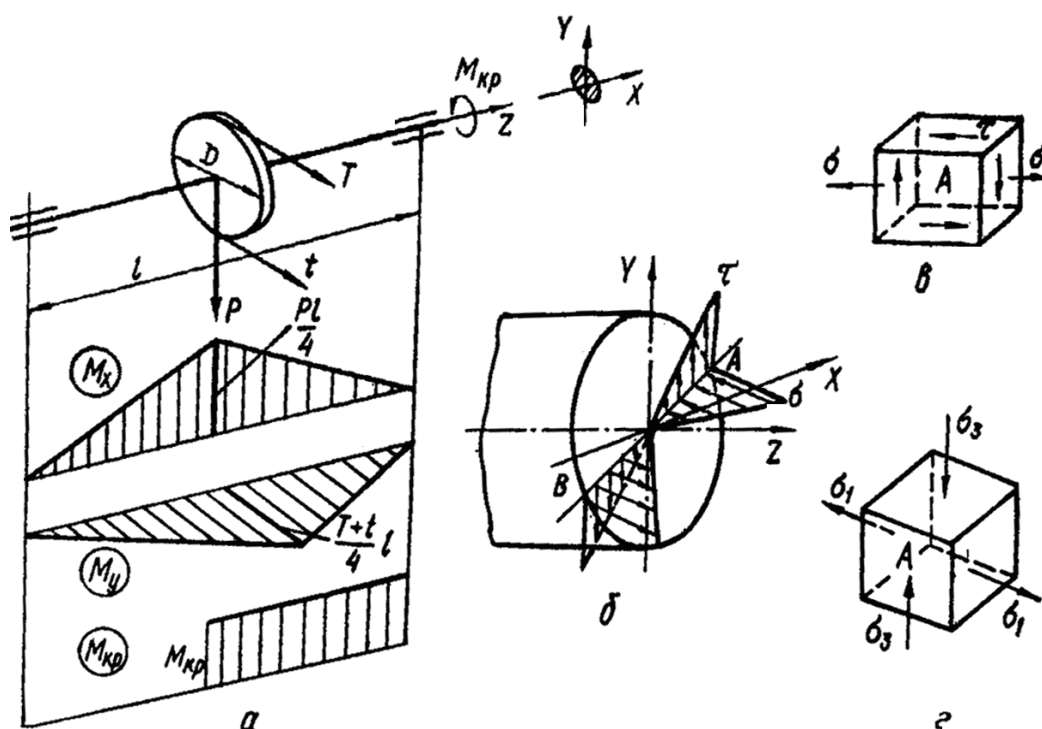


Рис. 8.1

Так как на вал действуют вертикальная сила D и горизонтальная сила $T + t$, то строим эпюры изгибающих моментов, действующих в вертикальной и

горизонтальной плоскостях, рассматривая вал как балку, лежащую на шарнирных опорах, одна из которых подвижная. Величину суммарных изгибающих моментов $M_{изг}$ для любого сечения вала находим как геометрическую сумму обеих составляющих.

Для каждого сечения имеется своя плоскость действия изгибающего момента, но так как вал имеет круглое поперечное сечение, у которого моменты сопротивления относительно всех центральных осей одинаковы, то без влияния на результаты расчета можно совместить плоскости изгибающих моментов для всех сечений и построить суммарную эпюру, располагая ее в плоскости чертежа (рис. 8.1,а). Тогда

$$M_{изг} = \sqrt{M_{верт}^2 + M_{гор}^2} = \sqrt{M_y^2 + M_x^2} \quad (8.1)$$

Вычисляя наибольший изгибающий $\dot{I}_{\epsilon\zeta\bar{a}}$ и крутящий $\dot{I}_{\epsilon\delta}$ моменты, находим наибольшие напряжения в материале (рис.8.1, б). Опасными являются точки А и В.

Элементарный объем части вала, взятый в точке, находится в плоском напряженном состоянии, по его двум граням действуют нормальные (растягивающие или сжимающие) напряжения от изгиба σ , а по четырем граням - касательные напряжения от кручения τ (рис. 8.1 в, г).

Поэтому при проверке прочности такого элемента необходимо применить условия, вытекающие из четырех теорий прочности:

1) теория наибольших нормальных напряжений

$$\frac{1}{2} \left[\sigma_{изг} + \sqrt{\sigma_{изг}^2 + 4 \cdot \tau_{кр}^2} \right] \leq [\sigma] ; \quad (8.2)$$

2) теория наибольших деформаций

$$\frac{1}{2} \left[0,35 \cdot \sigma_{изг} + 0,65 \cdot \sqrt{\sigma_{изг}^2 + 4 \cdot \tau_{кр}^2} \right] \leq [\sigma] ; \quad (8.3)$$

3) теория наибольших касательных напряжений

$$\sqrt{\sigma_{изг}^2 + 4 \cdot \tau_{кр}^2} \leq [\sigma]; \quad (8.4)$$

4) энергетическая теория

$$\sqrt{\sigma_{изг}^2 + 3 \cdot \tau_{кр}^2} \leq [\sigma]. \quad (8.5)$$

Известно, что для круглых валов: $\sigma_{изг} = \frac{M_{изг}}{W}$; $\tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}$; $W_{\rho} = 2 \cdot W$.

Подставляя W_{ρ} и W в формулах (8.1) – (8.4), получим:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{M_{изг}}{W} + \sqrt{\left(\frac{M_{изг}}{W} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_{кр}}{2W} \right)^2} \right] = \frac{M_{изг} + \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}}{2 \cdot W} = \frac{M_{расч.}}{W} \leq [\sigma] \quad (8.6)$$

Отсюда $\frac{M_{расч.}}{W} \leq [\sigma]$.

Подобным образом могут быть получены расчетные формулы и по другим теориям прочности. Все эти формулы можно заменить одной расчетной формулой

$$\frac{M_{расч.}}{W} \leq [\sigma], \quad (8.7)$$

где $M_{расч.}$ - расчетный момент, величина которого зависит как от $M_{изг}$ и $M_{кр}$, так и от принятой теории прочности:

$$\begin{aligned} M_{расч.I} &= \frac{1}{2} \left[M_{изг} + \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2} \right], \\ M_{расч.II} &= 0,35 \cdot M_{изг} + 0,65 \cdot \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}, \\ M_{расч.III} &= \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}, \\ M_{расч.IV} &= \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

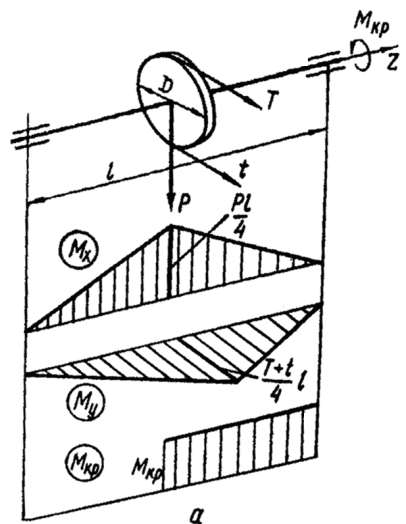
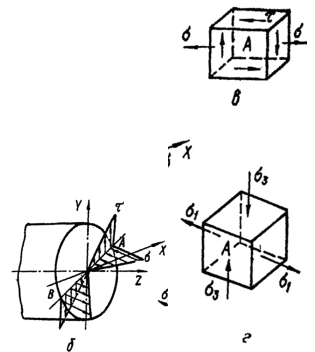
При $W = \frac{\pi D^3}{32}$ диаметр вала из (8.7) будет равен:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{расч.}}{\pi[\sigma]}}. \quad (8.9)$$

В настоящее время при расчете валов из вязких сталей наибольшее распространение получили теория наибольших касательных напряжений и энергетическая теория прочности.

Результаты п. 8 показаны в табл.8.1.

Таблица 8.1.

	Деформации	Напряжения	Условия прочности	Условия жесткости
Изгиб с кручением круглого стержня	$M_{изг} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}$ $M_{\rho III} = \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}$ $M_{\rho IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2}$ $M_{скр} = (T - t) \cdot \frac{D}{2}$ 	$\sigma_{III} = \frac{\sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}}{W};$ $\sigma_{IV} = \frac{\sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2}}{W}$ $\sigma_{изг} = \frac{M_{изг}}{W}$ $\tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{2 \cdot W} = \frac{T}{W_{\rho}};$ $\sigma_{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$ $\sigma_{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$ 	$(\sigma_{III})_{\max} \leq [\sigma]$ $(\sigma_{IV})_{\max} \leq [\sigma]$	$W_{III} \geq \frac{\sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}}{[\sigma]};$ $W_{IV} \geq \frac{\sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2}}{[\sigma]}$

Список литературы

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: 1976.
2. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986.
3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989.
4. Иосилевич Г.Б., Строганов Г.Б., Маслов Г.С. Прикладная механика. – М.: Высшая школа, 1989.
5. Павлице В.Т. Основи конструювання та розрахунку деталей машин. – К.: Вища школа, 1993.
6. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов. – К.: Вища школа, 1986.
7. Путята Т.В. и др. Прикладная механика. – М.: Высшая школа, 1986.
8. Степин П.А. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1987.
9. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Ч. I. -М.: 1963.
10. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Ч II. - М.: 1965.
11. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение.....	3
1. Общие определения.....	6
1.1. Классификация сил, действующих на элементы конструкций..	6
1.2. Понятие о деформации, упругости и пластичности.....	7
1.3. Основные гипотезы и допущения.....	8
1.4. Метод сечений. Напряжения.....	9
1.5. Виды деформаций.....	11
Вопросы для самоконтроля.....	12
2. Растяжение, сжатие.....	13
2.1. Вычисление напряжений по площадкам, перпендикулярным к оси стержня.....	13
2.2. Условие прочности.....	15
2.3. Деформации при растяжении (сжатии). Закон Гука.....	16
2.4. Коэффициент Пуассона.....	19
2.5. Изменение объема при растяжении или сжатии.....	20
Вопросы для самоконтроля.....	25
3. Сложное напряженное состояние. Напряжения и деформация.....	26
3.1. Понятие о главных напряжениях. Виды напряженного состояния материала.....	28
3.2. Напряжения при плоском напряженном состоянии.....	30
3.3. Нахождение главных напряжений.....	32
3.4. Вычисление деформаций при плоском и объемном напряженном состоянии.....	32
4. Сдвиг. Понятие о сдвиге.....	36
4.1. Связь между напряжениями и деформациями при чистом сдвиге.....	40
Вопросы для самоконтроля.....	41
5. Геометрические характеристики плоских сечений.....	43

5.1. Статические моменты площади. Центр тяжести поперечного сечения.....	43
5.2. Моменты инерции плоских фигур.....	45
5.3. Полярный момент инерции.....	47
5.4. Центробежный момент инерции.....	48
Вопросы для самоконтроля.....	50
6. Кручение. Основные понятия.....	52
6.1. Определение напряжений при кручении кругового вала.....	53
6.2. Определение деформаций при кручении.....	56
Вопросы для самоконтроля.....	63
7. Изгиб.....	64
7.1. Понятие о балках и опорных закреплениях.....	64
7.2. Изгибающий момент и поперечная сила в сечении балки.....	65
7.3. Дифференциальные зависимости между интенсивностью сплошной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом.....	68
7.4. Чистый изгиб. Определение нормальных напряжений при чистом изгибе.....	70
7.5. Условия прочности. Подбор сечений балок.....	77
7.6. О рациональной форме сечения.....	79
7.7. Касательное напряжение при изгибе.....	79
7.8. Проверка прочности по главным напряжениям.....	81
7.9. Деформации балок. Аналитический способ определения деформаций.....	82
Вопросы для самоконтроля.....	90
8. Совместное действие изгиба и кручения.....	93
Список литературы.....	98

Учебное издание

Курс лекций по дисциплине «Прикладная механика». Часть 1. «Основы расчетов на прочность» (для студентов электротехнических и строительных специальностей, направление подготовки 0922 – «Электромеханика» факультета последипломного образования и заочного обучения).

Авторы: Эльмира Владимировна Лукина,
Анатолий Иванович Кузнецов

Редактор: Н.З. Алябьев

План 2008, поз. 45-Н

Подп. к печати 11.04.08	Формат 60×84 1/16	Бумага офисная
Печать на ризографе	Усл.-печ. листов 5,0	Уч.-изд. листов 5,5
Зак. №	Тираж 200 прим.	

61002, Харьков, ХНАГХ, ул. Революции, 12

Сектор оперативной полиграфии при ИВЦ ХНАГХ
61002, Харьков, ХНАГХ, ул. Революции, 12